Mathematik für Informatiker III, Klausur vom 9.2.2009

1. Eigenwerte: $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2/3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(1-\lambda) - 3\cdot 2/3 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+4} = \frac{1\pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

Eigenvektoren: $\lambda_1 = 2 \quad \begin{pmatrix} -2 & 2/3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1 \quad \begin{pmatrix} +1 & 2/3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$T = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad \det T = -9$

$T^{-1} = \frac{1}{\det T}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \Delta \qquad A = T\Delta T^{-1}$

b.) $A^{10} = T\cdot\Delta^{10}\,T^{-1} = T\cdot\begin{pmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 1024 & 2 \\ 3\cdot 1024 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{9} = \begin{pmatrix} 342 & 682/3 \\ 1023 & 683 \end{pmatrix}$

2.

	0	v_1	v_2	v_3	v_1+v_2	v_1+v_3	$v_1+v_2+v_3$	v_2+v_3
	0	1	0	0	1	1	1	0
	0	0	1	0	1	0	1	1
	0	0	0	1	0	1	1	1
	0	0	1	1	1	1	0	0
	0	1	0	0	1	1	1	0
Gewicht:	0	2	2	2	4	4	4	2

linearer Code, daher Minimalabstand = Minimalgewicht = 2

Der Code kann 1 Fehler erkennen und 0 Fehler korrigieren.

3. $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & x & 7 \\ 6 & 7 & x & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-4) \\ \times(-6) \end{matrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & x-12 & -9 \\ 0 & -5 & x-18 & -15 \end{pmatrix} \times\frac{5}{3} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & x-12 & -9 \\ 0 & 0 & -\frac{2x}{3}+2 & 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{rg} A = 3 \Leftrightarrow -\frac{2x}{3}+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

4. $X = X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6$, X_i = quadrierte Augenzahl beim i-ten Würfel; unabhängig

$E(X_i) = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$. $E(X) = E(X_1)+\dots+E(X_6) = 91$

$Var(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = \frac{1+16+81+256+625+1296}{6} - \left(\frac{91}{6}\right)^2 = \frac{2275}{6} - \frac{8281}{36}$

$Var(X) = Var(X_1)+\dots+Var(X_6)$ (X_i unabhängig!): $Var(X) = \frac{5369}{6}$

5. 2, 5, 7 sind paarweise teilerfremd $\Rightarrow$ (Chinesischer Restsatz) Lösung eindeutig mod 70.

$2\cdot 5\cdot 7 = 70$; erweiterter Euklidischer Algorithmus:

$ggT(2,35) = 1 = 1\cdot 35 - 17\cdot 2 \qquad 35 \equiv 0\ (35),\ 35 \equiv 1\ (2)$

$ggT(5,14) = 1 = 3\cdot 5 - 1\cdot 14 \qquad -14 \equiv 0\ (14),\ -14 \equiv 1\ (5)$

$ggT(7,10) = 1 = 3\cdot 7 - 2\cdot 10 \qquad -20 \equiv 0\ (10),\ -20 \equiv 1\ (7)$

Lösung $x = 1\cdot 35 + (-1)\cdot(-14) + 4\cdot(-20) \mod 70$

$= -31 \mod 70 = 39$

(oder durch Probieren)

Alle Lösungen im Intervall $[-80, 80]$: $-31, 39, \cancel{119}$

6. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1+1-1-1-1-1 = -4 \neq 0$, linear unabhängig

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, linear abhängig

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, linear abhängig

d) $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times(-3) =$

$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -5 \end{pmatrix} = 3$, linear unabhängig

e) $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 36 \neq 0$, linear unabhängig