Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 1. Übungsblatt

Abgabe Montag, 20. Oktober 2008, 12:00 Uhr

(0-Punkte-Aufgaben sind freiwillige Vor- oder Zusatzübungen.)

---

1. (0 Punkte) 30 Köpfe, 80 Beine, wieviel Hühner, wieviel Schweine?

2. Lineare Abbildungen (0 Punkte)

   Die *Möbel&Holz* GmbH stellt drei Arten von Vollholzmöbeln her. Die nebenstehende Tabelle gibt an, wieviel Holz welcher Art für ein Möbelstück jedes Typs benötigt werden. Wieviel Holz wird benötigt, um 4 Betten, 2 Armsessel und 1 Couch herzustellen?

	Eiche	Erle	Esche
Armsessel	9	11	15
Bett	29	26	25
Couch	20	15	10

   Wieviel muss man an Materialwert für ein Bett kalkulieren, wenn die Preise für die drei Holzarten 14, 9, und 12 Taler sind?

3. (0 Punkte) Die Steuerfahndung stellt bei der Überprüfung der *M&H* GmbH fest, dass im vergangenen Jahr 320 Einheiten Eiche, 400 Einheiten Erle, und 60 Einheiten Esche eingekauft wurden. Was kann man daraus schließen?

4. Elementargeometrie (0 Punkte)

   Finden Sie ein Gleichungssystem, dass die Punkte auf der Geraden durch $(1,0,0)$ und $(2,-4,1)$ im $\mathbb{R}^3$ beschreibt.

5. Einsetzen (3 Punkte)

   Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{w}$ sind als Linearkombinationen $\vec{u} = 3\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2 - 5\vec{v}_3$ und $\vec{w} = -7\vec{v}_1 + \vec{v}_3$ der drei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ gegeben.

   (a) (0 Punkte) Stellen Sie $\vec{u} + 3\vec{w}$ als Linearkombinationen der drei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ dar.

   (b) (3 Punkte) Wenn $\vec{v}_2 = 3\vec{v}_1 - 6\vec{v}_3$ ist, wie kann man dann $\vec{u}$ als Linearkombinationen der zwei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_3$ darstellen?

   Geben Sie an, welche Rechenregeln eines Vektorraumes Sie in jedem Schritt verwenden.

6. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass ein Vektorraum V bezüglich der Addition eine *Gruppe* ist:

   (a) Beweisen Sie $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$, für alle $\vec{v} \in V$.

   (b) Zeigen Sie, dass es für jeden Vector $\vec{v} \in V$ einen Vektor $\vec{w} \in V$ mit $\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ gibt.

7. Vektorräume (6 Punkte)

   Welche der folgenden Mengen sind Vektorräume (bezüglich der punktweisen Addition und Multiplikation mit einem Skalar)?

   $M_1 = \{ f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f(0) = f(1) \}$ $\quad M_2 = \{ f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f(1/4) = (f(1/2))^2 \}$

   $M_3 = \{ f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f(0) = -f(1) \}$ $\quad M_4 = \{ f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ monoton wachsend} \}$

8. Linearkombinationen (5 Punkte)

   (a) (0 Punkte) Welche Punkte der Ebene lassen sich als Linearkombinationen $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3$ der Vektoren $\vec{v}_1 = (2,3)$, $\vec{v}_2 = (3,-2)$, $\vec{v}_3 = (1,5)$ mit lauter *positiven* Koeffizienten λ_i darstellen?

   (b) (3 Punkte) Wie ist es für $\vec{v}_1 = (2,3)$, $\vec{v}_2 = (3,-2)$, $\vec{v}_3 = (0,0)$?

   (c) (2 Punkte) Wie ist es für $\vec{v}_1 = (2,3)$, $\vec{v}_2 = (3,-2)$, $\vec{v}_3 = (-1,0)$?

Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 2. Übungsblatt

Abgabe Montag, 27. Oktober 2008, 12:00 Uhr

9. Lineare Abhängigkeit (5 Punkte)

   Sind die folgenden Vektoren linear abhängig? Wenn ja, dann stellen Sie einen als Linearkombination der übrigen dar.

   (a) $(3, 2, 4), (-3, 2, 4), (0, 1, 2)$
   (b) $(1, 2, 1), (2, 1, 2), (2, 4, 2)$
   (c) $(0, 0, 1), (3, 2, 1)$
   (d) $(1, 0, 1), (1, 0, -1), (-1, 0, -1), (-1, 0, 1)$
   (e) $(1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1)$

10. Lineare Hülle (5 Punkte)

    Gehört der folgende Vektor zur linearen Hülle der in Aufgabe 9 angegebenen Vektoren?

    (a) $(1, 1, 1)$ (b) $(1, 1, 1)$ (c) $(9, 8, 7)$ (d) $(5, 0, 1)$ (e) $(1, 2, 4)$

11. Basen (0 Punkte) Stellen die jeweiligen Vektoren aus den Aufgaben 9a–e eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ dar? Sind sie ein Erzeugendensystem für den Raum $\mathbb{R}^3$?

12. Charakterisierung der linearen Abhängigkeit (4 Punkte)

    Beweisen Sie: Wenn es für einen Vektor $\vec{x}$ zwei verschiedene Darstellungen als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ gibt, dann sind die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ linear abhängig.

13. Zusammensetzung von linearen Abbildungen (0 Punkte)

    Die nebenstehende Tabelle gibt den Preis und das Gewicht für die drei Holzarten an, die bei der *Möbel&Holz* GmbH aus Aufgabe 2 verwendet werden.

	Preis	Gewicht
Eiche	14	52
Erle	9	38
Esche	12	51

    Erstellen Sie eine Tabelle, die für jedes der drei Möbelstücke den Gesamtmaterialwert und das Gesamtgewicht angibt.

14. (6 Punkte) Die *X&YLO* GmbH stellt aus n verschiedenen Holzarten m Arten von Möbeln her. Für ein Möbelstück des Typs i werden a_{ij} Einheiten von Holzart j benötigt, für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$.

    Eine Einheiten von Holzart j kostet b_{j1} Taler und wiegt b_{j2}. Stellen Sie eine Formel für den Materialpreis c_{i1} und das Gewicht c_{i2} jedes Möbelstücks $i = 1, \ldots, m$ auf.

15. Gleiche Unterräume (0 Punkte)

    Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Unterräume des $\mathbb{R}^4$ gleich sind. Beschreiben Sie zunächst kurz, wie Sie vorgehen.

    $$\mathrm{Lin}(\{(2, 1, 0, 4), (3, 3, 2, 1)\}), \quad \mathrm{Lin}(\{(5, 4, 2, 5), (1, 2, 2, -3)\})$$

    Welche Dimension hat dieser Unterraum?

16. Basisergänzung (0 Punkte)

    Ergänzen Sie die Vektoren aus Aufgabe 9, die linear unabhängig sind und keine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, zu einer Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$.

17. (0 Punkte) Wählen Sie aus den Vektoren aus Aufgabe 9a–e jeweils eine Basis für den durch sie aufgespannten Unterraum aus.

Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 3. Übungsblatt

Abgabe Montag, 3. November 2008, 12:00 Uhr

18. Paarweise Unabhängkeit (0 Punkte)

    Gegeben seien 3 Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, die paarweise linear unabhängig sind. Folgt daraus, dass die drei Vektoren x, y, z insgesamt linear unabhängig sind? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

19. Unterraum und Dimension (6 Punkte)

    Im reellen Vektorraum $\mathbf{R}^4$ seien die folgenden Unterräume gegeben:

    $$U = \{\, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \,\}$$
    $$W = \{\, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0,\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \,\}$$

    Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension von U, W, $U \cap W$, $U + W$.

20. Lineare Abbildungen (4 Punkte)

    Welche der folgenden Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind linear? Beweisen Sie, dass die Bedingungen der Definition linearer Abbildungen erfüllt sind, oder geben Sie ein Beispiel an, wo eine Bedingung der Definition verletzt ist.

    (a) $f(x, y) = (|x - y|, |y - x|)$
    (b) $g(x, y) = (2x - y, y - 2x)$
    (c) $h(x, y) = (x^2 + x, y - x)$
    (d) $j(x, y) = (x - y, 1 - x)$

21. Dimensionsformel (5 Punkte)

    Beweisen Sie: Wenn U_1 und U_2 zwei *verschiedene* $(n-1)$-dimensionale Unterräume des $\mathbb{R}^n$ sind, dann ist
    $$\dim(U_1 \cap U_2) = n - 2.$$

22. Matrizenprodukt (4 Punkte)

    Wie viele Zeilen und Spalten muss die Matrix X haben, damit die folgende Gleichung sinnvoll ist? Bestimmen Sie die Menge der Matrizen X, die die Gleichung lösen.
    $$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

23. Matrizenprodukt (0 Punkte)

    (a) Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
    (b) Beweisen Sie, dass das Produkt zweier Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $x \in \mathbb{R}$ wieder eine Matrix dieser Gestalt ist.
    (c) Hat das Produkt zweier Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die gleiche Gestalt?

24. Matrizenpotenzen (0 Punkte)

    Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Matrix
    $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 4. Übungsblatt

Abgabe Dienstag, 11. November 2008, 14:00 Uhr

25. Verknüpfung linearer Abbildungen (5 Punkte)

    Beweisen Sie direkt aus den Definitionen:

    (a) (3 Punkte) Die Verknüpfung zweier linearer Abbildungen ist eine lineare Abbildung

    (b) (2 Punkte) Wenn zu einer linearen Abbildung $f\colon V \to W$ die Umkehrabbildung $g\colon W \to V$ mit $g(f(v)) = v$ für alle $v \in V$ und $f(g(w)) = w$ für alle $w \in W$ existiert (wenn f also *bijektiv* ist), dann ist g ebenfalls eine lineare Abbildung.

26. (0 Punkte) Wie viele Multiplikationen und Additionen muss man beim Berechnen des Matrizenprodukts $A \cdot B$ für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ durchführen?

27. (0 Punkte) Beweisen Sie, dass die Matrizen $\mathbb{R}^{m\times n}$ einen Vektorraum bilden (bezüglich der Addition und der Multiplikation mit einem Skalar). Was ist die Dimension dieses Vektorraumes? Bestimmen Sie eine Basis.

28. Matrizen und komplexe Zahlen (5 Punkte)

    (a) (3 Punkte) Beweisen Sie, dass die Summe und das Produkt zweier Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ wieder eine Matrix dieser Gestalt ist.

    (b) (2 Punkte) Die Matrizen dieser Form bilden einen Unterraum des Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis dieses Vektorraums.

    (c) (0 Punkte) Wenn man die Matrix in (a) mit der komplexen Zahl $a+bi$ identifiziert, dann entspricht die Addition und Multiplikation von Matrizen der Addition und Multiplikation der entsprechenden komplexen Zahlen. (Die Matrizen der Gestalt in (a) bilden einen Körper, der zum Körper der komplexen Zahlen *isomorph* ist.)

29. (4 Punkte) Die Werte der linearen Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seien auf folgender Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ gegeben:

    (a) auf allen ganzzahligen Vektoren $\mathbb{Z}^2$

    (b) auf den Vektoren $(1, 1)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ und $(-3, -3)$

    (c) auf den Vektoren $(1, 1)$, $(\sqrt{2}, 2)$ und $(\sqrt{3}, 3)$

    (d) auf den Vektoren $(-1, 0)$ und $(1, 1)$

    Ist dadurch die Funktion g eindeutig festgelegt? Wie kann man $g((2, 4))$ durch die gegebenen Werte ausdrücken?

30. Matrizenpotenzen (4 Punkte)

    Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

    Beweisen Sie Ihre Formel durch vollständige Induktion. Gilt Ihr Ergebnis auch für negative $n \in \mathbb{Z}$?

31. Lineare Hülle (0 Punkte)

    Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? (Geben Sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel.)

    Wenn $\vec{x} \in \mathrm{Lin}(\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\})$ und $\vec{y} \in \mathrm{Lin}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\})$ ist,
    dann ist $\vec{x} + \vec{y} \in \mathrm{Lin}(\{\vec{u}_1 + \vec{v}_1, \dots, \vec{u}_k + \vec{v}_k\})$.

Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 5. Übungsblatt

Abgabe Dienstag, 18. November 2008, 14:00 Uhr (Aufgabe 38 eine Woche später)

32. (5 Punkte) Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ist durch folgende Matrix gegeben.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine Basis B_1 von $\ker f$ und erweitern Sie sie zu einer Basis B von $\mathbb{R}^4$. Prüfen Sie nach, dass die Bilder der Ergänzungsvektoren $B \setminus B_1$ eine Basis für $\operatorname{im} f$ bilden.

33. Rang (0 Punkte)

Die einer $m\times n$-Matrix A entsprechende Abbildung bezeichnen wir mit $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Gilt für zwei Matrizen A und B immer $\operatorname{im} f_{A+B} = \operatorname{im} f_A + \operatorname{im} f_B$? (Beweis oder Gegenbeispiel).

34. Rang (4 Punkte)

Beweisen Sie:

(a) (4 Punkte) Wenn man einen einzelnem Eintrag einer Matrix ändert, dann steigt der Rang höchstens um 1.

(b) (0 Punkte) Wenn man einen einzelnem Eintrag einer Matrix ändert, dann verminderst sich der Rang höchstens um 1.

(Hinweis: Suchen Sie aus den verschiedenen äquivalenten Charakterisierungen des Ranges eine geeignete aus.)

35. (0 Punkte) Beweisen Sie:

$$\operatorname{rg}(A + B) \leq \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$$

36. Obere Dreiecksform (6 Punkte)

Bestimmen den Rang der folgenden Matrizen durch Überführung in obere Dreiecksform:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

37. Matrixmultiplikation (0 Punkte)

Bestimmen Sie alle Matrizen $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit der Eigenschaft $A \cdot B = B \cdot A$, wobei A die folgende Matrix ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

38. (5 Punkte) Schreiben Sie die folgende 3×3-Matrix als Produkt von Elementarmatrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Mathematatik für Informatiker III, WS 2008/09 — 6. Übungsblatt

Abgabe Dienstag, 25. November 2008, 14:00 Uhr

38. (5 Punkte, Wiederholung vom 5. Blatt) Schreiben Sie die folgende 3×3-Matrix als Produkt von Elementarmatrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

39. Kern und Bild (0 Punkte)

    (a) Bestimmen Sie für die 4×4-Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ eine Basis des Kerns.

    (b) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes.

    (c) Welche Dimension hat der von den Vektoren $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ erzeugte Unterraum?

40. Gleichungssysteme (5 Punkte)

    Im $\mathbb{R}^4$ ist der Unterraum $U = \mathrm{Lin}((2,3,4,5),(3,4,5,6))$ gegeben. Konstruieren Sie ein Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und 4 Unbekannten, dessen Lösungsmenge $U + (1,0,1,-2)$ ist.

41. Lineare Gleichungssysteme (5 Punkte)

    Bestimmen Sie die Lösungsmengen $\text{Lös}\,(A\,|\,\vec{b})$ und $\text{Lös}\,(A\,|\vec{c})$ der Gleichungssysteme $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ und $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}$$

42. Lösbarkeit (0 Punkte)

    Untersuchen Sie für die drei Fälle $m < n$, $m = n$, und $m > n$, ob die folgende Aussage richtig ist (Beweis oder Gegenbeispiel):

    > Für alle $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ gilt: Wenn $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eine eindeutige Lösung hat, muss auch $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ eine Lösung haben.

43. Modellierung mit linearen Gleichungssystemen (4 Punkte)

    Von einer natürlichen Zahl n sei über die Primfaktorzerlegung $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ das Folgende bekannt:

    - Es treten nur die Primfaktoren $2, 3$ und 5 auf und die Summe aller Primfaktoren ist 41.
    - Genau die Hälfte der Primfaktoren ist 2.
    - Der Faktor 3 tritt genau einmal öfter auf als der Faktor 5.

    Bestimmen Sie alle Zahlen n mit den gennanten Eigenschaften. Verwenden Sie ein lineares Gleichungssystem zur Lösung des Problems.

Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 7. Übungsblatt

Abgabe Dienstag, 2. Dezember 2008, 14:00 Uhr

44. Elementare Umformungen (0 Punkte)
    Begründen Sie, warum man eine $n \times n$-Matrix vom Rang n nur mit elementaren Zeilenoperationen und ohne Spaltenoperationen in obere Dreiecksform überführen kann.

45. (a) Lineare Rekursion (0 Punkte)
    Die unendliche Folge $x_0, x_1, x_2, \dots$ sei durch die folgende Rekursion gegeben.
    $$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \text{ für } n \geq 2, \quad x_0 = 3,\ x_1 = 1$$
    Berechnen Sie $x_2, x_3, \dots, x_8$. Stellen Sie die Matrix A auf, die durch die Formel $\vec{u}_n = A \cdot \vec{u}_{n-1}$ den Vektor $\vec{u}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ aus dem Vektor $\vec{u}_{n-1} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$ berechnet.

    (b) (5 Punkte) Bestimmen Sie die entsprechende 3×3-Matrix A für die Rekursion
    $$y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + 5y_{n-3}$$
    und bestimmen Sie dazu die inverse Matrix A^{-1}.

46. (4 Punkte) Für welche reellen Werte von x hat die folgende Matrix Rang 2?
    $$\begin{pmatrix} 1 & x & -2 \\ 2 & 3 & x \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

47. Inverse Matrix (6 Punkte, korrigierte Fassung von Matrix B)
    Invertieren Sie folgende Matrizen durch Nutzung von elementaren Zeilenumformungen.
    $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } |a| \neq 1; \quad C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ mit } ad \neq bc$$

48. Determinanten (0 Punkte)
    Welche der folgenden Aussagen gelten für beliebige $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

    (a) $\det(A + B) = \det A + \det B$
    (b) $\det(\lambda A) = \lambda \det A$
    (c) $\det(A(BC)) = \det((AB)C)$
    (d) Aus $\det A = 1$ folgt $A = E_n$.
    (e) Wenn $\det A = 1$ ist, dann gehört A zu einer umkehrbaren Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

49. Determinanten (5 Punkte)

    (a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $a_{ij} = 1$ für $i + j = n + 1$, und $a_{ij} = 0$ sonst. Das heißt, auf der Nebendiagonalen stehen Einsen.

    (b) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass für eine quadratische Blockmatrix der Form
    $$D = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$
    mit quadratischen Untermatrizen A, B, C die Gleichung $\det D = \det A \cdot \det B \cdot \det C$ gilt. In der obigen Darstellung steht 0 für Nullmatrizen passender Größe.

Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 8. Übungsblatt

Abgabe Dienstag, 9. Dezember 2008, 14:00 Uhr

50. Blockmatrizen (5 Punkte)

    (a) (1 Punkt) Berechnen Sie
    $$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
    und die zum Produkt inverse Matrix.

    (b) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass für eine quadratische Blockmatrix der Form
    $$D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$
    mit invertierbaren quadratischen Untermatrizen A, B die folgende Beziehung gilt:
    $$D^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

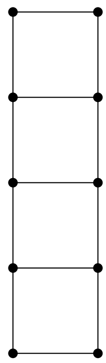
    (c) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass eine quadratische Blockmatrix D in der obigen Form nicht invertierbar ist, wenn die Blöcke A und B nicht quadratisch sind.

51. Produkt von transponierten Matrizen (0 Punkte)
    Beweisen Sie $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$. Für eine invertierbare Matrix A gilt $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

52. Orientierungstest (5 Punkte)

    Wie kann man mit Hilfe von Orientierungstests für Dreiecke feststellen, ob vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 die Ecken eines konvexen Vierecks im Gegenuhrzeigersinn bilden?

53. Iteration (5 Punkte)

    Die Anzahl x_n der Spannbäume in der Leiter L_n mit n Sprossen und die Anzahl y_n der aufspannenden Wälder von L_n aus 2 Bäumen, bei denen die beiden obersten Knoten in verschiedenen Komponenten liegen, kann durch die Rekursion
    $$x_{n+1} = 3x_n + y_n, \quad y_{n+1} = 2x_n + y_n$$
    mit den Anfangswerten $x_1 = y_1 = 1$ berechnet werden. Die Abbildung rechts zeigt L_5. Schreiben Sie die Rekursionsgleichung mit Hilfe einer Matrix. Berechnen sie den Vektor (x_n, y_n) für $n = 1, \ldots, 100$. Beschreiben Sie das Verhalten dieses Vektors bei wachsendem n.

54. Determinanten (5 Punkte)

    Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Matrizen invertierbar?
    $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & x \\ 6 & 7 & x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & x \\ x & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 0 \\ x & 2 & x & 1 \\ 5 & x & x & 1 \end{pmatrix}$$

55. Determinanten und Rang (0 Punkte)
    Beweisen Sie:

    (a) Aus einer Matrix vom Rang r kann man durch Streichen von Zeilen und Spalten eine $(r \times r)$-Untermatrix B mit $\det B \neq 0$ erzeugen.

    (b) Wenn eine Matrix A eine $(r \times r)$-Untermatrix B, (die durch Streichen von beliebigen Zeilen und Spalten entsteht), mit $\det B \neq 0$ enthält, dann ist $\operatorname{rg} A \geq r$.

Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 9. Übungsblatt

Abgabe Dienstag, 16. Dezember 2008, 14:00 Uhr

56. Wahr oder falsch? (0 Punkte)

    (a) Wenn eine Matrix A eine (4×4)-Untermatrix B mit $\det B \neq 0$ enthält, dann enthält sie auch eine (3×3)-Untermatrix C mit $\det C \neq 0$.

    (b) Je 3 Vektoren im $\mathbb{R}^4$ sind linear unabhängig.

    (c) Angenommen die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 erzeugen den dreidimensionalen Vektorraum V und erfüllen die Gleichung $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$. Dann bilden je drei der v_i eine Basis von V.

57. (0 Punkte) Bestimmen Sie eine Menge von *verschiedenen* Vektoren, die $\mathbb{R}^4$ erzeugen, aber keine Basis bilden.

58. (0 Punkte) Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung mit $f(1,2,0) = 2$ und $f(0,1,-1) = 1$. Was ist $f(-1,1,-3)$?

59. (0 Punkte) Für welche Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt die Beziehung $AB = BA$ für alle $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$?

60. Lösbarkeit (5 Punkte)

    Für welche Werte $d \in \mathbb{R}$ hat das folgende Gleichungssystem keine Lösung, eine eindeutige Lösung, oder unendlich viele Lösungen?

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & z & = & d \\ x & & & - & z & = & 1 \end{array}$$

61. Basistransformation (5 Punkte)

    Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei die Spiegelung an der Geraden $y = x$ in der x-y-Ebene. Durch welche Matrix wird f in der Basis $\binom{4}{5}, \binom{5}{-1}$ beschrieben?

62. Das Frobenius-Problem (5 Punkte)

    (a) (2 Punkte) In Lilliput gibt es nur Münzen zu 5 und zu 9 Lewonzen. Welches ist der größte Geldbetrag, den man nicht mit diesen Münzen bezahlen kann? (Zum Beispiel kann man die Beträge 1, 2, 3 und 4 Lewonzen offensichtlich nicht mit diesen Münzen bezahlen.)

    (b) (3 Punkte) Welches ist der größte Geldbetrag, den man nicht mit diesen Münzen bezahlen kann, wenn auch Wechselgeld herausgegeben wird? (Zum Beispiel kann man 4 Lewonzen bezahlen, indem man mit einer 9-Lewonzen-Münze bezahlt und eine 5-Lewonzen-Münze als Wechselgeld zurückbekommt.) Begründen Sie Ihre Antworten.

63. Kongruenzen (5 Punkte)

    Bestimmen Sie alle Lösungen folgender Gleichungen (jeweils modulo m).

    (a) $6x \equiv 5 \pmod{17}$

    (b) $7x + 13 \equiv 3x - 12 \pmod{15}$

    (c) $6x \equiv 3 \pmod{9}$

    (d) $12x \equiv 5 \pmod{100}$

    (e) $x^2 \equiv 5 \pmod{11}$

64. (0 Punkte) Erstellen Sie eine Additionstabelle und eine Multiplikationstabelle für die Restklassen modulo 8.

Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 10. Übungsblatt

Abgabe Dienstag, 6. Jänner 2009, 14:00 Uhr

---

64. Endliche Körper (0 Punkte)

    Erstellen Sie eine Additionstabelle und eine Multiplikationstabelle für die Restklassen modulo 8. Warum bilden diese beiden Operationen keinen Körper auf $\mathbb{Z}_8$? Welche Körperaxiome gelten, und welche Körperaxiome sind verletzt?

65. Simultane Kongruenzen (0 Punkte)

    Bestimmen Sie alle Zahlen $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit

    (a) $x \equiv -1 \pmod 5$, $x \equiv 3 \pmod 6$, $x \equiv 4 \pmod 7$

    (b) $y \equiv 3 \pmod{11}$, $y \equiv 7 \pmod{13}$, $y \equiv 11 \pmod{17}$

    (c) $z \equiv 1 \pmod 2$, $z \equiv 2 \pmod 3$, $z \equiv 3 \pmod 4$

66. Potenzen von Restklassen (5 Punkte)

    Berechnen Sie $2^{10000} \bmod 41$, $2^{(10^6)} \bmod 101$, $(-2)^{1000} \bmod 88$, $95^{-96} \bmod 97$, und $89^{-90} \bmod 91$.

67. Matrizen über endliche Körpern (5 Punkte)

    Bestimmen Sie über dem Körper $\mathbb{Z}_5$ die inverse Matrix A^{-1} zu

    $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

68. Gleichungen über $\mathbb{Z}_2$ (0 Punkte)

    Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ für $x \in \mathbb{Z}_2^5$:

    $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

69. Erzeugung einer Prüfmatrix (5 Punkte)

    Bestimmen Sie reelle Matrizen B_1, B_2, sodass $\ker B_1 = \operatorname{im} A_1$ und $\ker B_2 = \operatorname{im} A_2$ ist.

    $$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

70. Fehlerkorrigierende Codes (5 Punkte)

    (a) (2 Punkte) Wie viele Fehler kann der Code $C = \{00100, 10001, 01010, 11111\}$ erkennen? Wie viele Fehler kann er korrigieren?

    (b) (3 Punkte) Wie viele Fehler kann der durch die obige Erzeugermatrix G gegebene lineare Code $C \subset \mathbb{Z}_2^6$ erkennen? Wie viele Fehler kann er korrigieren?

71. Iteration (0 Punkte)

    Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $v, Av, A^2v, \ldots, A^kv$ linear unabhängig sind, wenn $A^kv \neq 0$ und $A^{k+1}v = 0$ ist.

Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09
Zwischenklausur

Jede Aufgabe hat 5 Punkte. Abgabe bis Montag, 12. Jänner 2009, 13:45 Uhr

---

72. Simultane Kongruenzen

    Bestimmen Sie alle Zahlen $x \in \{-100, -99, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, 99, 100\}$ mit

$$\begin{aligned} x &\equiv -1 \pmod 2 \\ x &\equiv -1 \pmod 3 \\ x &\equiv 2 \pmod 5 \end{aligned}$$

73. Bestimmen Sie den Rang der Matrix A über $\mathbb{Z}_2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

74. Basen

    Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung mit den zwei vorgegebenen Werten $f(1,2,0) = 3$ und $f(0,1,-1) = -4$. Ist der Wert von $f(-1,1,-3)$ durch diese Angaben eindeutig festgelegt? Bestimmen Sie gegebenenfalls diesen Wert.

75. Berechnen Sie die folgende Determinante (über $\mathbb{R}$).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

76. Orientierungstest

    Überprüfen Sie *rechnerisch*, ob das Dreieck $P_1P_2P_3$ mit den Ecken $P_1 = \binom{1}{1}$, $P_2 = \binom{-1}{4}$, $P_3 = \binom{4}{-4}$ im Uhrzeigersinn oder gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist.

77. Gleichungssysteme

    G sei die Gerade im $\mathbb{R}^3$ durch die Punkte $(3,2,1)$ und $(2,1,3)$. Konstruieren Sie ein Gleichungssystem mit 3 Unbekannten, dessen Lösungsmenge G ist.

78. "Skalarprodukt" in endlichen Körpern (5 Punkte).

    Im Vektorraum $V = \mathbb{Z}_2^n$ kann man analog zu reellen Vektorräumen folgende Abbildung $V \times V \to \mathbb{Z}_2$ definieren: (Alle Operationen sind modulo 2 durchzuführen.)

    $$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

    So überträgt man Begriffe wie Orthogonalität und orthogonales Komplement auf V.

    (a) (2 Punkte) Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}_2^4$ eine Basis für das orthogonale Komplement des durch $\vec{v}_1 = (1, 1, 0, 0)$ und $\vec{v}_2 = (0, 1, 1, 1)$ aufgespannten Unterraums.

    (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass in einem reellen Vektorraum mit Skalarprodukt ein von 0 verschiedener Vektor niemals zu sich selbst orthogonal sein kann. Zeigen Sie, dass in V ein von 0 verschiedener Vektor zu sich selbst orthogonal sein kann.

    (c) (1 Punkt) Gilt der Satz von der eindeutigen Zerlegung $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ eines Vektors $\vec{x}$ in eine Komponente $\vec{u}$ aus einem vorgegebenen Unterraum U und eine Komponente $\vec{v} \in U^\perp$ auch in V? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

    (d) (0 Punkte) Welche anderen Begriffe im Zusammenhang mit euklidischen Vektorräumen lassen sich auf V übertragen und welche lassen sich nicht übertragen?

79. (a) Isometrien (3 Punkte)

    Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ zwischen zwei Vektorräumen V, W mit Skalarprodukt eine Isometrie ist, wenn sie die Normen erhält:

    $$\|f(x)\| = \|x\|\,, \text{ für alle } x \in V$$

    (Hinweis: Durch Betrachten von $\|u - v\|^2$ sieht man, wie sich das Skalarprodukt durch die Norm ausdrücken lässt.)

    (b) (0 Punkte) Ist jede Abbildung, die den Winkel zwischen zwei Vektoren erhält, eine Isometrie?

    (c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass f genau dann eine Isometrie ist, wenn sie Orthogonalität erhält und für mindestens einen Vektor $x_0 \neq \vec{0}$ die Norm erhält.

    $$\langle f(x), f(y) \rangle = 0 \iff \langle x, y \rangle = 0, \text{ für alle } x, y \in V; \text{ und } \|f(x_0)\| = \|x_0\|$$

80. Orthogonale Projektion (5 Punkte). Im $\mathbb{R}^3$ sei durch der durch die Vektoren $\vec{v}_1 = (1, 2, 3)$ und $\vec{v}_2 = (-2, 0, 1)$ aufgespannte Unterraum U gegeben.

    (a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Projektion $p_U(\vec{x})$ von $\vec{x} = (1, 0, 0)$ auf U.

    (b) (2 Punkte) Bestimmen sie die Matrix der Projektionsabbildung $p_U\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

81. Orthogonale Matrizen (5 Punkte)

    Eine *orthogonale Matrix* ist eine quadratische Matrix, deren Spalten eine Orthonormalbasis bilden.

    (a) (2 Punkte) Bestimmen Sie alle orthogonalen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

    (b) (2 Punkte) Bestimmen Sie zwei orthogonale Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det A = +1$ und $\det B = -1$. Worin unterscheiden sich die durch A und B gegebenen Abbildungen? (Hinweis: Betrachten Sie die Wirkung der Abbildungen auf ein Dreieck.)

    (c) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass das Produkt zweier orthogonaler 2×2-Matrizen wieder eine orthogonale Matrix ist.

Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 13. Übungsblatt

Abgabe Dienstag, 27. Jänner 2009, 14:00 Uhr

82. Der Vektorraum der stetigen Funktionen (0 Punkte)

    Auf der Menge V der auf dem Intervall $[0,1]$ definierten stetigen Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sind die Operationen der punktweisen Addition und der punktweisen Multiplikation mit einem Skalar definiert. Das heißt, $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ und $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x)$, für alle $x \in [0,1]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

    (a) Zeigen Sie, dass V mit diesen beiden Operationen ein Vektorraum ist.

    (b) Zeigen Sie, dass auf V durch die folgende Formel ein Skalarprodukt definiert ist:
    $$\langle f, g\rangle = \int_{x=0}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

    (c) Berechnen Sie die Norm von $u(x) = x^2$ und von $v(x) = 1 - x$ und den Winkel zwischen u und v.

    (d) Berechnen Sie die Projektion von u auf den von v aufgespannten Unterraum.

83. Permutationsmatrizen (5 Punkte). Eine $(n \times n)$-Matrix P, in der in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine 1 steht, und wo alle übrigen Einträge 0 sind, heißt *Permutationsmatrix*. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen durch ein Gegenbeispiel.

    (a) (0 Punkte) Es gibt genau $n!$ Permutationsmatrizen der Größe $n \times n$.

    (b) (1 Punkt) Jede Permutationsmatrix ist eine orthogonale Matrix.

    (c) (0 Punkte) Die Inverse jeder Permutationsmatrix ist eine Permutationsmatrix.

    (d) (1 Punkt) Für jede Permutationsmatrix P gilt $P^{-1} = P$.

    (e) (1 Punkt) Für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ hat der Vektor Px die gleiche Summe der Elemente wie x.

    (f) (1 Punkt) Die Summe zweier Permutationsmatrizen ist eine Permutationsmatrix.

    (g) (1 Punkt) Das Produkt zweier Permutationsmatrizen ist eine Permutationsmatrix.

84. Eindeutige Zerlegung in komplementäre Unterräume (5 Punkte)

    U_1 und U_2 seien zwei Unterräume von V mit $\mathrm{Lin}(U_1 \cup U_2) = V$ und $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$. Zeigen Sie, dass jeder Vektor $x \in V$ auf eindeutige Art in $\vec{x} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ mit $\vec{u}_1 \in U_1$ und $\vec{u}_2 \in U_2$ zerlegt werden kann.

85. Orthogonale Matrizen (5 Punkte). Beweisen Sie:

    (a) (2 Punkte) Jede orthogonale Matrix A muss Determinante $\det A = \pm 1$ haben.

    (b) (3 Punkte) Das Produkt zweier orthogonaler Matrizen ist eine orthogonale Matrix.

86. Kegelschnitte und Hauptachsentransformation (5 Punkte)

    (a) (0 Punkte) Wie schaut die allgemeine Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius r aus?

    (b) (0 Punkte) Welchen Mittelpunkt (x_M, y_M) und welchen Radius hat der Kreis mit der Gleichung $5x^2 + 5y^2 - 2x + 10y - 100 = 0$?
    Hinweis: Versuchen Sie, die Gleichung durch eine Variablentransformation $(\hat{x}, \hat{y}) = (x - x_M, y - y_M)$ in die Normalform von Aufgabe (a) zu transformieren.

    (c) (2 Punkte) Welchen Mittelpunkt hat die Ellipse mit der folgenden Gleichung?
    $$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 2x + 10y - 100 = 0$$

    (d) (2 Punkte) In welche Richtung zeigen die Achsen der Ellipse, und welche Längen haben sie? (Ein Taschenrechner ist hilfreich.)

    (e) (1 Punkt) Skizzieren Sie die Ellipse im x-y-Koordinatensystem.

Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 14. Übungsblatt

Abgabe Dienstag, 3. Feber 2009, 14:00 Uhr

87. Eigenwerte (5 Punkte)

    Wahr oder falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

    (a) Wenn A invertierbar ist und λ ein Eigenwert von A ist, dann ist $1/\lambda$ ein Eigenwert von A^{-1}.
    (b) Wenn λ ein Eigenwert von A ist, dann ist $\lambda^2 - 3\lambda$ ein Eigenwert von $A^2 - 3A$.
    (c) Wenn λ ein gemeinsamer Eigenwert von A und von B ist, dann ist λ auch ein Eigenwert von $A + B$.
    (d) Wenn λ und μ zwei *verschiedene* Eigenwerte von A sind, dann sind die zugehörigen Eigenvektoren orthogonal zueinander.
    (e) Wenn A invertierbar ist, dann sind alle Eigenwerte von 0 verschieden.

88. Diagonalisierung (5 Punkte)

    (a) (2 Punkte) Diagonalisieren Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ durch eine invertierbare Matrix T, sodass $T^{-1} \cdot A \cdot T$ eine Diagonalmatrix ist.
    (b) (1 Punkt) Berechnen Sie A^{100}.
    (c) (2 Punkte) Schreiben Sie eine Formel für das linke obere Element von A^n.

89. Exponentielles Wachstum (0 Punkte)

    Beweisen Sie, dass die Einträge der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Fibonacci-Folge $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ bilden. Leiten Sie durch Diagonalisieren der Matrix eine exakte Formel für die Fibonacci-Zahlen her, und erklären Sie, was der Wachstumsfaktor $\lim_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n$ mit den Eigenwerten der Matrix zu tun hat.

90. (0 Punkte) Ist das Produkt zweier symmetrischer Matrizen wieder symmetrisch?

91. Mengenalgebren (0 Punkte)

    $\mathcal{F}$ sei eine Menge von Teilmengen einer Grundmenge Ω, die abgeschlossen unter Vereiningung und Komplement ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ dann auch unter Durchschnitt und Mengendifferenz abgeschlossen ist.

92. (a) Vereinigung von Ereignissen (3 Punkte)

    Die Definition eines Wahrscheinlichkeitsraumes, fordert dass $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$ für alle *disjunkten* Mengen A und B gilt. Zeigen Sie, dass daraus diese allgemeinere Regel folgt:

    $$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

    (b) (2 Punkte) Beweisen Sie: Wenn zwei Ereignisse A und B unabhängig sind, dann sind auch A und das Komplementärereignis $\bar{B}$ unabhängig.

93. Unabhängigkeit (0 Punkte)

    Es werden drei (unterschiedliche) Würfel geworfen, und das Ergebnis (die Augenzahl) sei W_1, W_2, W_3. Zeigen Sie, dass die folgenden drei Ereignisse *paarweise* unabhängig sind, aber nicht *vollständig* unabhängig: A: $W_1 + W_2$ ist gerade. B: $W_1 + W_3$ ist gerade. C: $W_2 + W_3$ ist ungerade.

94. Eigenvektoren (0 Punkte)
Bestimmen Sie eine (3×3)-Matrix mit *linken* Eigenvektoren $\vec{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (2, 0, 0)$, und zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$.

95. Geometrische Wahrscheinlichkeit (0 Punkte)

In einem Kreis mit Mittelpunkt O wird eine "zufällige" Sehne eingezeichnet.

Modell A. Man wählt gleichverteilt einen Punkt P im Inneren des Kreises und nimmt die Sehne, deren Mittelpunkt P ist.

Modell B. Man wählt gleichverteilt zwei Punkte A und B auf dem Rand des Kreises und nimmt die Sehne AB.

Bestimmen Sie für jedes Modell die Wahrscheinlichkeit, dass AOB ein spitzwinkliges Dreieck ist.

96. Geometrische Wahrscheinlichkeit (5 Punkte)

Es soll ein Punkt gleichverteilt aus dem Inneren des Einheitskreises gewählt werden.

Methode I. Stelle den Punkt in Polarkoordinaten $(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ dar und wähle r und ϕ gleichverteilt im Intervall $r \in [0, 1)$ und $\phi \in [0, 2\pi)$.

Methode II. Wähle zwei unabhängige gleichverteilte Zufallszahlen u und v in $[0, 1)$ und nimm den Punkt $(x, y) = (\sqrt{u} \cos(2\pi v), \sqrt{u} \sin(2\pi v))$.

Berechnen Sie für jede Methode die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt (a) im rechten oberen Viertelkreis, (b) im Kreis mit Radius $1/\sqrt{2}$ um den Mittelpunkt landet.

Bei welcher Methode ist der gewählte Punkt gleichverteilt? (Die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt in eine Region des Kreises fällt, soll proportional zur Fläche sein.)

97. Dichte und Verteilungsfunktion (0 Punkte)

(a) Eine Zufallsvariable X habe die Dichte $f_X(x) = 2x$ für $0 < x < 1$ und ansonsten sei die Dichte 0. Finden Sie die zugehörige Verteilungsfunktion von X.

(b) Finden Sie für eine Zufallsvariable X mit der folgenden Verteilungsfunktion die Dichte, falls sie existiert:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1+x^2)}, & -\infty < x \leq 0\,, \\ \frac{1+2x^2}{2(1+x^2)}\,, & 0 < x < \infty. \end{cases}$$

(c) Für welchen Wert von c ist die folgende Funktion eine Verteilungsfunktion?

$$F(x) := \int_{-\infty}^{x} c e^{-|t|} \, dt$$

98. Indikatorvariablen (0 Punkte)

Die Zahlen $1, 2, \ldots, 7$ werden in eine zufällige Reihenfolge $a_1, \ldots, a_7$ gebracht. Bestimmen Sie den Erwartungswert für Anzahl Z der Elemente a_i, die größer als alle ihre Vorgängerelemente sind. (Beispiel: Für $\underline{4}, 2, 3, \underline{5}, 1, \underline{7}, 6$ ist $Z = 3$.)

Anleitung: Die Zufallvariable X_i sei 1, falls a_i, größer als seine Vorgängerelemente ist, und 0 sonst. $(i = 1, 2, \ldots, 7)$. Was ist der Erwartungswert von X_i? (Die ersten i Elemente stehen in zufälliger Reihenfolge!) Verwenden Sie dann die Beziehung $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_7$.

99. Zufallsvariablen (0 Punkte)

Wir würfeln, bis zweimal hintereinander eine Sechs kommt. Berechnen Sie die Verteilung, den Erwartungswert, und die Varianz für die Anzahl X der notwendigen Würfe.

Mathematik für Informatiker III, WS 2008/09 — 15. Übungsblatt

Freiwillige Abgabe bis Dienstag, 10. Februar 2009, 14:00 Uhr

Sie können bis zu 2 Aufgaben von diesem Blatt abgeben, für zusätzliche Punkte.

---

100. Orthogonalisierung (5 Punkte)

     Berechnen Sie eine Orthonormalbasis für den von den drei Vektoren $(2, -2, 2, -2)$, $(2, 1, 0, -1)$, und $(0, 0, 2, -2)$ aufgespannten Unterraum des $\mathbb{R}^4$.

101. Genmutationen (5 Punkte)

     Für die Ausgangsfolge ATCGACTTACGCGATCGATC wird dreimal hintereinander folgende Operation ausgeführt: An einer zufälligen Stelle wird das vorhandene Symbol durch ein zufälliges *verschiedenes* Symbol aus dem Alphabet {C,G,T,A} ersetzt (in allen Fällen gleichverteilt). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dadurch die Folge ATCGACTCCCGCGATCGATC entsteht?

102. Erwartungswert und Varianz (0 Punkte)

     Ein fairer Würfel wird dreimal hintereinander geworfen. Berechnen Sie den Erwartungswert (2 Punkte) und die Varianz (3 Punkte) für das *Produkt* der Augenzahlen.

103. Diskrete Wahrscheinlichkeit (5 Punkte)

     Ein fairer Würfel wird geworfen. Wenn die Augenzahl ungerade ist, wird der Würfel noch einmal geworfen und die erreichte Augenzahl zur ersten dazuaddiert. Die Zufallsvariable X ist das Ergebnis der ersten Wurfs, falls er gerade ist, bzw. die Summe der beiden Würfe. Bestimmen Sie die Verteilung (2 Punkte), den Erwartungswert (1 Punkt), und die Varianz von X (2 Punkte).

104. Poisson-Verteilung (6 Punkte)

     Ein Nachrichtenpuffer der Kapazität n wird jede Millisekunde geleert, und die enthaltenen Nachrichten werden verarbeitet. Wenn in einer Periode mehr als n Nachrichten ankommen, gehen die überzähligen Nachrichten verloren. Die Anzahl der Nachrichten, die in einer Millisekunde ankommen, ist Poisson-verteilt mit Mittelwert $\lambda = 5$.

     (a) (3 Punkte) Wie groß muss n sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Periode der Puffer überläuft, höchstens 0,05 ist?

     (b) (3 Punkte) Wie groß muss n sein, damit die *erwartete Anzahl* der verlorenen gegangenen Nachrichten pro Periode höchstens 0,05 ist?

105. Geometrische Zufallsgrößen (0 Punkte)

     Betrachten Sie die Gleichverteilung im Würfel $[0, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3$. Für einen zufälligen Punkt z im Würfel seien $R(z)$, $S(z)$ und $V(z)$ der Radius, die Oberfläche und das Volumen der größten Kugel im Würfel mit Mittelpunkt in z. Bestimmen Sie die Dichtefunktionen und berechnen Sie die Erwartungswerte und Varianzen dieser Zufallsvariablen.

106. Monotone Transformation von Zufallsvariablen (5 Punkte)

     Die Zufallsvariable U sei gleichverteilt auf dem Intervall $[1, 4]$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und die Dichtefunktion der Variablen $V = U^3$.

107. Verschiebungssatz für das zweite Moment (4 Punkte)

     Beweisen Sie: Für eine Zufallsvariable X mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 gilt

     $$E((X - a)^2) = \sigma^2 + (a - \mu)^2. \qquad (a \in \mathbb{R} \text{ beliebig})$$

108. Tschebyscheff-Ungleichung (3 Punkte)

     Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit ab, dass bei 600 Würfen mit einem fairen Würfel mehr als 120-mal eine Sechs kommt.