Mathematik für Informatiker I **WS08/09**

9. Übung **Abgabe: 19.12.08 bis 12:00 Uhr**

Aufgabe 1: **Unabhängigkeit** 6 Punkte

Ein Kartenstapel bestehend aus $52 = 4 \cdot 13$ Karten in den Spielfarben Karo, Herz, Pik und Kreuz und den Werten $2, 3, 4, \ldots, 9, 10, B, D, K, A$ sei perfekt gemischt, d.h. wir nehmen an, dass jede Reihenfolge der 52 Karten gleich wahrscheinlich ist.

a) Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

A_1: die oberste Karte hat die Spielfarben Karo.

A_2: die unterste Karte hat die Spielfarbe Pik.

A_3: die unterste Karte ist eine 10.

A_4: die obersten zwei Karten haben die gleiche Spielfarbe.

Bestimmen Sie alle Wahrscheinlichkeiten $\Pr(A_i \cap A_j)$ für alle Konstellationen $1 \leq i < j \leq 4$ und stellen Sie damit fest, welche der Ereignispaare unabhängig sind.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ersten 5 Karten genau 4 Karten gleicher Farbe sind?

Aufgabe 2: **geometrische Verteilungen** $1 + 4 \times 2$ Punkte

In den folgenden Spielen wird ein Experiment so lange wiederholt, bis eine bestimmte Abbruchbedingung erfüllt ist. Zur Vereinfachung schreiben wir die Ergebnisfolgen als Strings (ohne Kommata). Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spiel über genau n Runden geht ($n \geq 1$ eine fest gewählte natürliche Zahl). Die Antworten sollten ausreichend begründet werden.

a) Würfeln bis zum ersten Mal eine 6 fällt (z.B. 2435216).

b) Münzwurf bis zum zweiten Mal Kopf (eine 0) fällt (z.B. 1101110).

c) Münzwurf bis zum k-ten Mal Kopf (eine 0) fällt für ein $k \leq n$ (z.B. 11010110 für $n = 8$ und $k = 3$).

d) Würfeln bis Summe durch 6 teilbar ist (z.B. 253455).

e) Doppelwurf mit zwei unabhängigen Würfeln bis beide die gleiche Zahl haben (z.B. für $(2, 3)(3, 1)(6, 4)(3, 3)$ ist $n = 4$).

Aufgabe 3: **Unabhängigkeit** 4 Punkte

a) Finden Sie in einem Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ mit Gleichverteilung drei Ereignisse A, B, C, die paarweise unabhängig sind und die Eigenschaft $\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(A) \cdot \Pr(B) \cdot \Pr(C)$ haben.

b) Finden Sie im gleichen Raum drei Ereignisse A, B, C, die paarweise unabhängig sind aber nicht die Eigenschaft $\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(A) \cdot \Pr(B) \cdot \Pr(C)$ haben.

Hinweis: Für Teil b kann man sich zuerst eine Lösung in einem Wahrscheinlichkeitsraum mit 4 Elementen überlegen.