

8. Übung

Abgabe: 12.12.08 bis 12:00 Uhr

Aufgabe 1:**Rekursion**

3+3

a) Wir betrachten die Rekursion $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ mit drei verschiedenen Sätzen von Anfangsbedingungen:

- i) $a_0 = 0$ und $a_1 = 2$,
- ii) $a_0 = 2$ und $a_1 = 1$,
- iii) $a_0 = 3$ und $a_1 = 5$,

Finden Sie in jedem der drei Fälle eine geschlossene Formel für a_n (durch Betrachtung eines Anfangsstücks der Folge) und schließen Sie dadurch auf eine allgemeine Formel.

b) Beweisen Sie diese allgemeine Formel mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 2:**lineare, homogene Rekursion**

2 + 5 + 3 Punkte

Ein Baukasten enthält vier Sorten von Bausteinen (rote, blaue, gelbe und grüne). Alle Bausteine haben die gleiche Grundfläche (die man sich als ein Quadrat oder einen Kreis vorstellen kann). Alle roten und blauen Bausteine haben die Höhe 1 und alle gelben und grünen Bausteine haben die Höhe 2. Sei t_n die Anzahl der verschiedenen Türme der Höhe n , die man durch einfaches Stapeln aus diesen Bausteinen aufbauen kann, wenn von jeder Sorte beliebig viele Exemplare zur Verfügung stehen:

- a) Beschreiben Sie t_n durch eine lineare, homogene Rekursion mit ausreichend vielen Anfangsbedingungen.
- b) Finden Sie eine geschlossene Formel für t_n und bestimmen Sie t_{11} und t_{12} mit Hilfe dieser Formel (Haskell mit Float-Typ und Runden).
- c) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahl t_{2n} durch 2^n teilbar ist.

Aufgabe 3:**Laufzeitanalyse und Rekursion**

3 Punkte

Es sei $T(n)$ die Laufzeit eines Algorithmus bei Eingaben der Größe n . Der Algorithmus arbeitet rekursiv und führt ein Problem der Größe n auf die Lösung von 4 Teilproblemen jeweils der Größe $(n-1)$ zurück. Zum Zusammensetzen der Gesamtlösung braucht er 8 weitere Zeiteinheiten. Geben Sie unter der Voraussetzung $T(1) = 3$ eine direkte Formel für $T(n)$ an.

Aufgabe 4:**Schubfachprinzip**

3 Punkte

Beweisen Sie mit dem Schubfachprinzip, dass man in jeder Menge von 5 Punkten, die in einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge 2 liegen, zwei Punkte finden kann, deren Abstand höchstens 1 ist.