Mathematik für Informatiker I **WS08/09**

7. Übung **Abgabe: 05.12.08 bis 12:00 Uhr**

Aufgabe 1: **Indexverschiebung** 6 Punkte

Vereinfachen Sie die folgenden Terme soweit wie möglich:

1. $$\sum_{i=0}^{n} \frac{i(i+4)}{2} + \sum_{i=4}^{n+4} \frac{i(i-4)}{2} - \sum_{i=0}^{n} (i^2 + 3i)$$

2. $$\frac{\prod_{i=1}^{2n} i}{\prod_{i=1}^{n} (4i-2)}$$

Aufgabe 2: **monotone Gitterwege** $1 + 3 + 3$ Punkte

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Anzahl monotoner Wege im 2–dimensionalen Gitter, die vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt (n,k) führen, gleich $\binom{n+k}{n}$ ist.

a) Wie groß ist die Anzahl a_k der monotonen Wege vom Punkt $A = (0,0)$ zum Punkt $B = (n,n)$, die dabei auch noch den Punkt $C_k = (k,k)$ durchlaufen, wobei $0 < k < n$ ist?

b) Zeigen Sie, dass **mehr** als die Hälfte der monotonen Wege von A nach B auch den Punkt C_1 durchlaufen, wenn n eine beliebige natürliche Zahl > 1 ist.

c) Beweisen Sie durch Abzählung von monotonen Gitterwegen die folgende Identität:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Hinweis: Betrachten Sie die Punkte auf der Gegendiagonale (von links oben nach rechts unten) und verallgemeinern Sie die Aussage aus Teilaufgabe a.

Aufgabe 3: **Abzählungen** 2 Punkte

Wieviele Wörter kann man aus den Buchstaben des Worts "abracadabra" bilden, wobei alle Buchstaben in der gegebenen Vielfachheit zu verwenden sind.

Aufgabe 4: **Binomischer Satz** 2+3 Punkte

Zeigen Sie mit Hilfe des Binomischen Satzes, dass die folgenden Werte ganzzahlig sind:

a) $(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

b) $\sqrt{2}\left((\sqrt{2}+\sqrt{5})^n + (\sqrt{2}-\sqrt{5})^n\right)$ für jedes ungerade $n \in \mathbb{N}$