Mathematematik für Informatiker I **WS08/09**

6. Übung **Abgabe: 28.11.08 bis 12:00 Uhr**

Aufgabe 1: **Doppeltes Abzählen** 8 Punkte

Für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ sei $p(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n und $f(n)$ die Anzahl der Faktoren in der Primzahlzerlegung von n (z.B. für $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ ist $p(12) = 2$ und $t(12) = 3$). Es gilt $p(1) = t(1) = 0$. Bestimmen Sie durch Anwendung der Methode des zweifachen Abzählens die folgenden Summen:

$$a)\ \sum_{n=1}^{40} p(2n) \qquad b)\ \sum_{n=1}^{40} p(6n) \qquad c)\ \sum_{n=1}^{40} t(n) \qquad d)\ \sum_{n=1}^{40} t(2n)$$

Machen Sie deutlich, welche Inzidenzstrukturen Sie für die einzelnen Teilprobleme verwenden.

Aufgabe 2: **Binomialkoeffizienten** $1 + 2 + 3 + 3$ Punkte

Eine fundamentale Eigenschaft der Binomialkoeffizienten ist die Identität $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n$.

a) Beweisen Sie diese Identität an Hand der geschlossenen Formel!

b) Führen Sie einen kombinatorischen Beweis dieser Identität durch Konstruktion einer Bijektion (zwischen welchen Mengen?).

c) Beweisen Sie diese Identität mit vollständiger Induktion über n unter Verwendung der Rekursion für Binomialkoeffizienten.

d) Beweisen Sie die folgende Identität mit vollständiger Induktion über n:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n} \qquad \text{für alle } n, m \geq 0.$$

Aufgabe 3: **Partitionen** $3 + 3$ Punkte

Sind $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ und $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$ zwei Partitionen der gleichen Menge M, dann nennt man $\mathcal{A}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{B}$, wenn für jedes $A_i \in \mathcal{A}$ ein $B_j \in \mathcal{B}$ existiert, so dass $A_i \subseteq B_j$ gilt. Anschaulich gesehen kann man eine Verfeinerung $\mathcal{A}$ aus $\mathcal{B}$ ableiten, wenn man bestimmte Blöcke B_j aus $\mathcal{B}$ in kleinere Blöcke zerlegt.

a) Zeigen Sie, dass die Verfeinerung eine Halbordnungsrelation über der Menge der Partitionen von M ist (Sie können die Menge der Partitionen mit $Part_M$ und die Relation mit $\preceq$ bezeichnen).

b) Zeichen Sie das Hasse–Diagramm dieser Halbordnung für die 4–elementige Menge $M = \{a, b, c, d\}$.