Mathematik für Informatiker I **WS08/09**

4. Übung **Abgabe: 14.11.08 bis 12:00 Uhr**

Aufgabe 1: **Äquivalenzrelationen** 3 + 4 Punkte

Gegeben ist ein Schachbrett dessen Felder wir mit Koordinatenpaaren $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, 8\} \times \{1, 2, \ldots, 8\}$ beschreiben. (z.B. bezeichnet $(1, 1)$ das Feld links unten). Die folgenden Relationen setzen zwei Felder zueinander in Beziehung wenn das zweite vom ersten aus mit einem Turm-, Läufer- oder Springerzug erreichbar ist:

Turm : $(a, b)\ T\ (c, d) \Leftrightarrow (a = c \vee b = d) \wedge |a - c| + |b - d| > 0.$

Springer: $(a, b)\ S\ (c, d) \Leftrightarrow |c - a|\,|d - b| = 2.$

Läufer: $(a, b)\ L\ (c, d) \Leftrightarrow |c - a| = |d - b| \neq 0.$

a) Offensichtlich beschreiben die Relationen $T \circ T$, $S \circ S$, $L \circ L$ die Erreichbarkeit in jeweils zwei Zügen. Bestimmen Sie die drei Mengen der von $(1, 1)$ mit $T \circ T$, $S \circ S$, und $L \circ L$ erreichbaren Felder.

b) Welche der Verknüpfungen $T \circ T$, $S \circ S$, $L \circ L$ und $(L \circ L) \cup L$ sind Äquivalenzrelationen? Begründen Sie positive Antworten durch Beschreibung der Äquivalenzklassen und negative Antworten durch einen konkreten Nachweis, dass eine Eigenschaft verletzt ist.

Aufgabe 2: **Halbordnungen** 2 + 3 Punkte

Die folgende Tabelle listet 11 Geräte auf, die von einem Testlabor untersucht wurden. Jedes Gerät x hat eine Qualitätsnote $q(x)$ und einen Preis $p(x)$. Wir definieren eine Halbordnung auf der Menge M der Geräte durch $x \preceq y$ genau dann, wenn $q(x) \leq q(y)$ und $p(x) \leq p(y)$.

Gerät	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
Qualitätsnote	2,3	3,0	1,7	1,7	1,3	2,3	1,3	3,0	3,3	1,3	3,3
Preis	105	130	120	90	100	80	115	95	75	150	85

a) Zeichnen Sie das Hasse–Diagramm dieser Halbordnung!

b) Bestimmen Sie die folgenden Größen (sofern sie existieren):

$max(\{d, g, j\})$ $min(\{a, b, f, k\})$ $inf(\{a, h, k\})$

$sup(\{a, h, k\})$ $sup(\{d, f, g\})$ $inf(\{b, j\})$

Aufgabe 3: **Funktionen** 7 Punkte

Gegeben sind die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch die folgenden Definitionen:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \frac{1}{|x|} & \text{sonst} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \ln |x| & \text{sonst} \end{cases} \qquad h(x) = e^x$$

Untersuchen Sie die Funktionen f, g, h, fg, gf, hg, gh auf Injektivität und Surjektivität. Geben Sie kuze Begründungen für Ihre Antworten!