**Mathematik für Informatiker I** **WS08/09**

**2. Übung** **Abgabe: 31.10.08 bis 12:00 Uhr**

---

**Aufgabe 1:** **Quantoren** 8 Punkte

Wir betrachten die folgenden Prädikate wahlweise im Bereich der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ oder der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ :
$P(x, y, z) =$ " $x + y = z$ " und $Q(x, y, z) =$ " $x \cdot y = z$ "
Bestimmen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen und begründen Sie Ihre Antwort wie im folgenden Beispiel: $\forall x \in \mathbb{Z}\ \forall z \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z} \quad P(x, y, z)$ ist wahr.
Begründung: Seien $x = a$ und $z = b$ beliebige ganze Zahlen, dann wählen wir $y = b - a \in \mathbb{Z}$ und erhalten mit $P(a, b - a, b)$ wegen $a + (b - a) = b$ eine wahre Aussage.

Die Aussagen:
a) $\exists z \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad \neg P(x, 2y, z)$
b) $\forall x \in \mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{Z} \quad \exists y \in \mathbb{Z} \quad P(4x, 2y, 2z)$
c) $\forall x \in \mathbb{Q} \quad \forall z \in \mathbb{Q} \quad \exists y \in \mathbb{Q} \quad Q(x, y, z)$
d) $\forall x \in \mathbb{Q} \quad \exists y \in \mathbb{Q} \quad \exists z \in \mathbb{Q} \quad (P(x, y, z) \wedge Q(x, y, z))$

**Aufgabe 2:** **Quantoren** 3 Punkte

Die Eigenschaft, dass eine natürliche Zahl $p$ eine Primzahl ist, kann man durch die folgende Formel ausdrücken (als Bereich wird $\mathbb{N}$ vereinbart):

$$(p > 1) \ \wedge\ \forall\, x \quad \forall y \quad (p = x \cdot y \rightarrow x = 1 \vee y = 1)$$

Negieren Sie diese Formel und bringen Sie den inneren Teil durch äquivalente Umformungen in eine möglichst einfache Form. Weisen Sie anhand dieser negierten Formel nach, dass $p = 15$ keine Primzahl ist.

**Aufgabe 3:** **Beweistechniken** $3 + 3$ Punkte

Beweisen Sie den folgenden Satz a) durch Kontraposition und b) durch Fallunterscheidung bezüglich der möglichen Reste beim Teilen durch 3. Alle bekannten Fakten über natürlich Zahlen (u.a. eindeutige Zerlegung in Primfaktoren) können verwendet werden.

**Satz:** Sind die ganzen Zahlen $a$ und $b$ nicht durch 3 teilbar, dann ist auch die Summe $a + b$ oder die Differenz $a - b$ nicht durch 3 teilbar.

**Aufgabe 4:** **Mengenfamilien** $1 + 3 + 3 + 1$ Punkte

Wir betrachten die Familien $\{A_i \,|\, i \in \mathbb{N}^+\}$ und $\{B_i \,|\, i \in \mathbb{N}^+\}$ von Punktmengen in der Ebene, die wie folgt beschrieben sind: Zur Menge $A_i$ (bzw. zur Menge $B_i$) gehören alle Punkte in der abgeschlossenen Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt $(0, i)$ und dem Radius $i$ (bzw. mit dem Mittelpunkt $(\frac{1}{i}, 0)$ und dem Radius $\frac{1}{i}$).
Bestimmen Sie die folgenden Vereinigungen und Durchschnitte und begründen Sie Ihre Lösung: *a)* $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^+} A_i$ *b)* $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} A_i$ *c)* $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^+} B_i$ *d)* $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} B_i$