

14. Übung

Abgabe: 06.02.09 bis 12:00 Uhr

Von diesem Übungszettel wird die erste Aufgabe korrigiert. Wer sein Punktekonto noch verbessern muss, sollte auch die zweite Aufgabe abgeben, darauf gibt es Zusatzpunkte.

Aufgabe 1:**KNF**

8 Punkte

Wie Sie wissen, kann man jede Bitfolge und damit jedes Bittupel als natürliche Zahl interpretieren. Wir wollen das in dieser Aufgabe für 4-Tupel wie üblich festlegen:

$$Z(a_3, a_2, a_1, a_0) = \sum_{i=0}^3 a_i \cdot 2^i.$$

Finden Sie für die folgenden vier Booleschen Funktionen **möglichst einfache** Darstellungen als KNF. Denken Sie immer zuerst darüber nach, ob Sie wirklich die kanonische KNF konstruieren müssen, oder ob Sie durch andere Überlegungen schneller und eleganter zum Ziel kommen (welche Zahlenpaare bilden).

$$\begin{aligned} f(x, y, z, u) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } (Z(x, y, z, u) \bmod 4) \neq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ g(x, y, z, u) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } (Z(x, y, z, u) \bmod 5) \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ h(x, y, z, u) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } Z(x, y, z, u) \geq 10 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ k(x, y, z, u) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } Z(x, y, z, u) \text{ keine Primzahl ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 2:**Vollständige Signaturen**

8 Punkte

Welche der folgenden logischen Signaturen sind vollständig? Zur Begründung positiver Antworten reicht es zu zeigen, dass sich alle Operationen einer bekannten vollständigen Signatur durch die Operationen der Signatur aus der Aufgabenstellung simulieren lassen. Negative Antworten werden in der Regel durch Beispiele von Funktionen begründet, die man mit der Signatur nicht darstellen kann. Das Finden eines geeigneten Beispiels wird schon als erster Lösungsschritt bewertet, aber zu einer kompletten Lösung gehört natürlich auch eine Begründung. Sie können alle in der Vorlesung gezeigten Fakten verwenden und auf die dort bewiesenen Unvollständigkeitsargumente zurückgreifen.

- a) $\Sigma_1 = \{\oplus, \rightarrow\}$
- b) $\Sigma_2 = \{1, \rightarrow\}$
- c) $\Sigma_3 = \{0, \rightarrow\}$
- d) $\Sigma_4 = \{0, 1, \leftrightarrow\}$

Aufgabe 3:**monotone Boolesche Funktionen**

4 Punkte

Zeigen Sie, dass alle monotonen Booleschen Funktionen mit der Signatur $\{0, 1, \vee, \wedge\}$ (also ohne Negation) dargestellt werden können.

Hinweis: Argumentieren Sie mit der DNF!

Definition:

1) Auf der Menge n -Tupel $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{B}^n$ führen wir die folgende Ordnungsrelation ein:

$(b_1, \dots, b_n) \preceq (c_1, \dots, c_n)$ genau dann, wenn $b_i \leq c_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, wobei sich das \leq von den Zahlen auf die Wahrheitswerte überträgt.

2) Man nennt eine Boolesche Funktion $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ **monoton**, wenn für beliebige Tupel aus $(b_1, \dots, b_n) \preceq (c_1, \dots, c_n)$ folgt, dass $f(b_1, \dots, b_n) \leq f(c_1, \dots, c_n)$.