Mathematik für Informatiker I **WS08/09**

13. Übung **Abgabe: 30.01.09 bis 12:00 Uhr**

Aufgabe 1: **BFS und DFS** $2+3+3$ Punkte

Für jedes Anfangsintervall der natürlichen Zahlen kann man einen "Graphen der gemeinsamen Teiler" $G_n = (V_n, E_n)$ wie folgt definieren:
$V_n = \{1, 2, \ldots, n\}$,
$E_n = \{\{i, j\} \mid i, j \in V_n,\ ggT(i, j) \geq 2\}$,
d.h. zwei Zahlen sind adjazent, wenn sie einen echten gemeinsamen Teiler haben.

a) Zeichnen Sie den Graphen G_{10} (Anordnung der Knoten auf einem Kreis) und bestimmen Sie die Anzahl der Kanten und der Zusammenhangskomponenten dieses Graphen.

b) Bestimmen sie im Graphen G_{10} den DFS–Baum und den BFS–Baum der Zusammenhangskomponente mit dem Knoten 2, wobei die 2 als Wurzel gewählt wird und die Adjazenzlisten aufsteigend geordnet sind.

c) Es seien $n, i \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq i \leq n/2$. Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen der Knoten i im Graphen G_n in der Zusammenhangskomponente C_2 des Knotens 2 liegt. Zeigen Sie, dass in G_n alle Zusammenhangskomponenten außer C_2 isolierte Knoten sind. Wie kann man diese Knoten genauer charakterisieren?

Aufgabe 2: **MST** $2+3$ Punkte

Für eine beliebige positive, ganze Zahl n definieren wir einen Graphen $G_n = (V_n, E_n)$ auf der Knotenmenge $V_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, wobei zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn der Betrag ihrer Differenz beim Teilen durch 3 den Rest 2 lässt:

$$E_n = \{\ \{i, j\} \mid |i - j| \bmod 3 = 2\}$$

a) Zeichnen Sie den Graphen G_8 (Anordnung der Knoten auf einem Kreis) und ordnen Sie den Kanten die folgenden Gewichte zu:

$$w(\{i, j\}) = |i - j| + \frac{\min(i, j)}{10}$$

b) Konstruieren Sie mit dem Algorithmus von **Kruskal** einen MST von G_8 mit der gegebenen Gewichtsfunktion. Um Ihr Vorgehen nachvollziehbar zu machen, geben Sie (in einer Tabelle) an, in welcher Reihenfolge die Kanten in den MST aufgenommen werden und wie groß die jeweils neu entstehende Zusammenhangskomponente ist.

Aufgabe 3: **Matchings** $4+1$ Punkte

Ein bipartiter Graph G auf den Knotenmengen $A = \{a_1, \ldots, a_7\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_7\}$ ist durch die folgende Adjazenzliste gegeben:

$$a_1 : b_1, b_3; \quad a_2 : b_1, b_3, b_5; \quad a_3 : b_1, b_4; \quad a_4 : b_4; \quad a_5 : b_6; \quad a_6 : b_2, b_5, b_7; \quad a_7 : b_6;$$

Die Nachbarschaften der Knoten aus B ergeben sich daraus und sollen auch aufsteigend geordnet sein.

a) Gegeben ist ein Matching $M = \{\{a_2, b_3\}, \{a_3, b_1\}, \{a_4, b_4\}, \{a_5, b_6\}, \{a_6, b_5\}\}$. Überprüfen Sie mit der in der Vorlesung vorgestellten Methode, ob M ein Maximum–Matching ist. Zeichnen Sie dazu den gerichteten Hilfsgraphen, stellen Sie mit DFS fest, ob ein M–augmentierender Weg existiert und erweitern Sie M gegebenenfalls.

b) Zeigen Sie mit dem Heiratssatz, dass $m(G) < 7$ ist.