Mathematik für Informatiker I **WS08/09**

10. Übung **Abgabe: 09.01.09 bis 12:00 Uhr**

Da dies der Weihnachtszettel ist, geben wir schon vorher bekannt, welche Aufgaben korrigiert werden, nämlich Aufgabe 2 als regulärer Teil und Aufgabe 3 zur Erlangung von Zusatzpunkten.

Aufgabe 1: **Erwartungswerte I** 0 Punkte

Es sei $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$ der Wahrscheinlichkeitsraum eines Würfels mit Gleichverteilung p und $(\Omega_2, p_2) = (\Omega, p) \times (\Omega, p)$ der Wahrscheinlichkeitsraum von zwei unabhängigen (unterscheidbaren) Würfeln.

a) Bestimmen Sie die Erwartungswerte der Zufallsvariablen über Ω_2:
$X(a_1, a_2) = a_1^2 + a_2^2$ und $Y(a_1, a_2) = a_1 \cdot a_2$.

b) In der Vorlesung wurde der Erwartungswert der Zufallsvariablen Z ausgerechnet, welche den Betrag der Differenz zwischen den beiden Würfeln anzeigt: $Z(a_1, a_2) = |a_1 - a_2|$. Für die Verallgemeinerung auf drei und mehr Würfel gibt es jeweils zwei Varianten: die minimale und die maximale Differenz. Für 3 Würfel haben wir:

$Z_{min}(a_1, a_2, a_3) = min\{|a_1 - a_2|, |a_1 - a_3|, |a_2 - a_3|\}$ und

$Z_{max}(a_1, a_2, a_3) = max\{|a_1 - a_2|, |a_1 - a_3|, |a_2 - a_3|\}$.

Die Bestimmung der Erwartungswerte $E(Z_{min})$ und $E(Z_{max})$ erfordert leider eine (etwas aufwändige) Aufteilung der $6^3 = 216$ Fälle. Machen Sie den Versuch! Zumindest für X_{min} kann man sich die Arbeit durch die Überlegung erleichtern, dass als Werte nur $0, 1$ und 2 in Frage kommen, wobei 0 und 2 leicht abzuzählen sind. Sie können ihre Ergebnisse natürlich auch durch ein Programm überprüfen lassen.

c) Stellen Sie eine Hypothese auf, wie sich diese Werte für große Werte von n (Wüfelanzahl) entwickeln. Geben Sie eine verbale Begründung (Plausibilitätserklärung) an. Können Sie die Hypothese auch beweisen?

Aufgabe 2: **Erwartungswerte II** 6 Punkte

Bei einer Klausur besteht eine Aufgabe aus 7 Fragen, die entweder mit ja oder mit nein zu beantworten sind. Für jede richtige Antwort erhält man 2 Punkte, für jede falsche 3 Minuspunkte. Man kann Fragen auch unbeantwortet lassen (0 Punkte). Zur Auswertung wird die Punktsumme S bestimmt. Ist S positiv, so wird die Gesamtaufgabe mit S Punkten bewertet, sonst mit 0 Punkten.

Bei Fragen, deren Beantwortung man nicht kennt, hat man die Wahl zwischen Strategie 1, die Frage unbeantwortet zu lassen, und Strategie 2, eine Antwort zu raten. Bestimmen Sie für die folgenden 3 Studenten den Erwartungswert für die Punktzahl bei der Strategie 2 (Rate–Strategie) und vergleichen Sie diese mit der Strategie 1. Entwerfen Sie jeweils einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Zufallsvariablen zur Beschreibung der erreichten Punktzahl.

Alice kann die Fragen 1 bis 5 sicher beantworten und ist bei den Fragen 6 und 7 völlig ratlos.

Bob hat nicht gelernt und ist bei allen Fragen völlig ratlos.
Carola kann die Fragen 1 und 2 sicher beantworten und ist bei den Fragen 3 bis 7 völlig ratlos.

Aufgabe 3: **Erwartungswerte III** 4 Punkte

n Familien haben bei einer Weihnachtsmannagentur einen Weihnachtsmann bestellt. Durch einen Fehler des Call-Centers hat jeder der n Weihnachtsmänner nur die Liste der n Adressen erhalten, aber nicht die Zuordnung zu seinem Kunden. Deshalb entschließen sich alle, einen zufälligen Kunden zu beglücken (unabhängig und gleichverteilt). Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Familien, bei denen kein Weihnachtsmann erscheint. Geben Sie eine Formel für den Erwartungswert an und berechnen Sie diesen Wert mit dem Taschenrechener für $n = 10$, $n = 20$ und $n = 30$. Was fällt Ihnen dabei auf?