3 Kombinatorik

3.1 Elementare Zählprinzipien

Die Abzählung von endlichen Mengen ist das klassische Thema der Kombinatorik. Dabei wird eine unendliche Familie $\{A_n \mid n \in I\}$ von endlichen Mengen A_n betrachtet, wobei n eine Indexmenge I durchläuft (in der Regel die natürlichen Zahlen). Zu bestimmen ist die *Zählfunktion* $f : I \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $f(n) = |A_n|$ für alle $n \in I$. Hier und im Folgenden bezeichnet $|M|$ die Anzahl der Elemente (Mächtigkeit) einer Menge M falls diese endlich ist und ∞ anderenfalls.

Oft werden die Mengen A_n aus einer gegebenen n–elementige Menge M (auch kurz *n–Menge* genannt) durch einfache strukturelle oder kombinatorische Bedingungen abgeleitet, z.B. die Menge $S(M)$ aller Permutationen von M (das sind bijektive Abbildungen von M nach M), die Menge $\mathcal{P}(M)$ aller Untermengen oder die Menge $\binom{M}{k}$ aller k–Untermengen von M. Im letzten Fall ist die Zählfunktion von den zwei Größen n und k abhängig. Ziel ist es, eine möglichst kurze, geschlossene Formel für $f(n)$ bzw. $f(n, k)$ zu finden.
Die meisten Aufgabenstellungen dieser Art lassen sich (auch wenn die Lösung teilweise enormen technischen Aufwand erfordert) auf vier Grundregeln zurückführen.

- **Summenregel:** Ist S die Vereinigung von paarweise disjunkten, endlichen Mengen $S_1, S_2, \ldots, S_t$, dann gilt $|S| = \sum_{i=1}^{t} |S_i|$.
- **Produktregel:** Ist S das Kartesische Produkt der endlichen Mengen $S_1, S_2, \ldots, S_t$, dann gilt $|S| = \prod_{i=1}^{t} |S_i|$.
- **Gleichheitsregel:** Existiert eine bijektive Abbildung zwischen zwei Mengen S und T, so gilt $|S| = |T|$
- **Die Regel vom doppelten Abzählen** wird etwas später erklärt.

Eine typische Anwendung der Summenregel besteht darin, die Elemente der Menge S nach gewissen, sich gegenseitig ausschließenden Eigenschaften E_i $(i = 1, \ldots, t)$ zu klassifizieren und die Mengen S_i wie folgt zu setzen $\{x \in S \mid x\ hat\ Eigenschaft\ E_i\}$.

Beispiel: Wir haben bereits eine Plausibilitätserklärung gefunden, warum die Potenzmenge einer n–Menge M genau 2^n Elemente hat. Hier ist ein kompletter Beweis mit vollständiger Induktion nach n.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist $M = \emptyset$, $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset\}$ und folglich $|\mathcal{P}(M)| = 1 = 2^0$
Induktionsschritt von n nach $n+1$: Sei M eine $(n+1)$–Menge und a ein fest gewähltes Element aus M. Wir zerlegen $\mathcal{P}(M)$ in zwei disjunkte Teilmengen $S_1 = \{A \subseteq M \mid a \in A\}$ und $S_2 = \{A \subseteq M \mid a \notin A\}$. Offensichtlich ist $S_2 = \mathcal{P}(M \setminus \{a\})$ die Potenzmenge einer n–Menge und nach Induktionsvorausetzung gilt $|S_2| = 2^n$. Wir konstruieren eine Bijektion zwischen S_1 und S_2 indem wir jeder Menge $A \in S_1$ die Menge $B = A \setminus \{a\} \in S_2$ zuordnen. Man erkennt die Bijektivität dieser Abbildung daran, dass eine Umkehrabbildung existiert, die jedem $B \in S_2$ die Menge

$A = B \cup \{a\} \in S_1$ zuordnet. Aus der Gleichheitsregel folgt $|S_1| = |S_2|$ und aus der Summenregel $|\mathcal{P}(M)| = |S_1| + |S_2| = 2|S_2| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Man kann die gleichen Argumente verwenden, um eine Rekursion für die Anzahl der k-Teilmengen einer n-Menge zu entwickeln. Sei $S = \binom{M}{k}$ die Menge aller k–Untermengen einer n–Menge M und bezeichne $\binom{n}{k}$ die Kardinalzahl von S (zunächst nur als ein formaler Ausdruck). Wir fixieren ein $a \in M$ und klassifizieren die k–Untermengen von M nach der Eigenschaft, ob sie a enthalten (E_1) oder nicht (E_2). Also ist $S_1 = \{A \in S \mid a \in A\}$ und $S_2 = \{A \in S \mid a \notin A\}$. Wie man leicht sieht, ist $S_2 = \binom{M \setminus \{a\}}{k}$ und auf der anderen Seite gibt es eine Bijektion zwischen S_1 und der Menge aller $(k-1)$–Untermengen von $M \setminus \{a\}$. Durch Anwendung von Gleichheits– und Summenregel erhalten wir die folgende rekursive Formel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Definitition: Eine *Inzidenzsystem* (S, T, I) besteht aus zwei (endlichen) Mengen S und T und einer *Inzidenzrelation* $I \subseteq S \times T$.

Regel vom zweifachen Abzählen: Sei (S,T,I) ein Inzidenzsystem und sei $r(a) = |\{b \in T \mid (a,b) \in I\}|$, $r(b) = |\{a \in S \mid (a,b) \in I\}|$ für alle $a \in S$, $b \in T$, dann gilt:

$$\sum_{a \in S} r(a) = \sum_{b \in T} r(b).$$

In der Tat sind beide Summen gleich $|I|$, denn die Paare der Relation I wurden nur auf zwei verschiedene Weisen aufgezählt. Oft wird diese Regel auch in etwas modifizierter Form unter Verwendung von Inzidenzmatrizen oder bipartiten Graphen verwendet:

Sei $M = (m_{ij})$ eine $m \times n$ Matrix, d.h. ein Rechteck–Schema mit m Zeilen und n Spalten in dem Zahlen m_{ij} (i-te Zeile, j-te Spalte) eingetragen sind. Sind $z_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}$ $(1 \leq i \leq m)$ die Zeilensummen, und $s_j = \sum_{i=1}^{m} m_{ij}$ $(1 \leq j \leq m)$ die Spaltensummen dann gilt $\sum_{i=1}^{m} z_i = \sum_{j=1}^{n} s_i$, denn beide Summen sind gleich der Summe aller Matrixelemente. Die Regel vom zweifachen Abzählen ergibt sich nun als Spezialfall für die sogenannte *Inzidenzmatrix*. Dazu werden die Elemente aus S und T numeriert, $S = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $T = \{b_1, \ldots, b_n\}$ und $m_{ij} = \begin{cases} 1 & falls \ (a_i, b_j) \in I \\ 0 & sonst \end{cases}$ gesetzt.

3.2 Die fundamentalen Zählkoeffizienten

Sei eine n–Menge N gegeben (ohne Einschränkung kann man $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ annehmen) und $0 \leq k \leq n$ eine natürliche Zahl. In diesem Abschnitt werden wir die Werte einiger Zählfunktionen bestimmen, die sehr häufig auftreten und deshalb mit eigenen Symbolen zeichnet werden. Eine k–elementige Untermenge von N wird auch k*–Kombination* genannt. Die Anzahl der k–Kombinationen einer n–Menge mit $\binom{n}{k}$ bezeichnet, und diese Anzahlen werden *Binomialkoeffizienten* genannt. Dabei werden k–Kombinationen (wie für Mengen üblich) als nicht geordnet betrachtet, d.h. $\{1, 3, 5\}$

und $\{3,5,1\}$ sind ein und dieselbe 3–Kombination. "Geordnete" k–Untermengen werden auch *k–Variationen (ohne Wiederholung)* genannt, alternativ kann dafür auch der Begriff *k–Permutation einer n–Menge* verwendet werden. Achtung: Geordnet heißt hier gerade nicht nach Größe geordnet, sondern in einer bestimmten Reihenfolge angeordnet! Man kann sie als Wörter der Länge k aus voneinander verschiedenen Elementen aus N kodieren (also $135 \neq 351$).

Der Begriff der Partition wurde bereits eingeführt und im Zusammenhang mit Äquivalenzrelationen verwendet. Wir verstehen darunter die Zerlegung einer Menge in disjunkte, nichtleere Untermengen (Blöcke). Bezeichnet k die Anzahl der Blöcke, so sprechen wir von *k–Partitionen.* An dieser Stelle ist es wichtig, auf einen bisher eher nebensächlichen Aspekt einzugehen: Betrachtet man die Partion als **Menge** von k Blöcken, dann spielt die Reihenfolge der Böcke keine Rolle und wir sprechen einfach von einer *k–Partition*, oder (wenn wir diesen Aspekt besonders betonen wollen) von einer *ungeordneten k–Partition.* Die Anzahl der k–Partitionen einer n–Menge wird mit $S_{n,k}$ bezeichnet. Die Zahlen $S_{n,k}$ werden *Stirling–Zahlen zweiter Art* genannt. Will man dagegen auch die Reihenfolge des Auftreten der Blöcke berücksichtigen, so spricht man von *geordneten k–Partitionen.* Zur Unterscheidung umfasst man die Blöcke einer ungeordneten Partition in Mengenklammern, während geordnete Partitionen als Tupel gechrieben werden (runde Klammern).

Beispiel: Die Mengen $\{\{2\},\{1,3,5\},\{4,6\}\}$ und $\{\{3,5,1\},\{2\},\{4,6\}\}$ sind gleich, d.h. sie stellen ein und dieselbe (ungeordnete) 3–Partition dar.
Dagegen sind $(\{2\},\{1,3,5\},\{4,6\})$ und $(\{1,3,5\},\{4,6\},\{2\})$ zwei verschiedene geordnete 3–Partitionen.

Die Anzahl der k–Variationen von N kann mit der Produktregel bestimmt werden (n Möglichkeiten für die erste Stelle und ist diese festgelegt, dann $n-1$ Möglichkeiten für die zweite Stelle,...):

$$n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Diese Anzahlen werden auch kurz mit $n^{\underline{k}}$ bezeichnet und *fallende Faktorielle* genannt. Streng genommen muss ein solcher Beweis auch wieder mit vollständiger Induktion geführt werden, aber inzwischen sollte jeder genug Übung darin haben, dieses Detail auszufüllen. Analog definiert man die *steigenden Faktoriellen* mit

$$n^{\overline{k}} = n(n+1)\dots(n+k-1) = \frac{(n+k)!}{n!}.$$

wobei wir $n^{\overline{0}} = n^{\underline{0}} = 1$ setzen.

Da jede k–Untermenge sich auf $k!$ Arten als k–Permutation darstellen lässt, gilt nach Produktregel $n^{\underline{k}} = k!\binom{n}{k}$. Daraus kann eine explizite Formel für die Binomialkoeffizienten abgeleitet werden:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Analog kann auch die Anzahl der geordneten k–Partitionen durch das Produkt $k!\,S_{n,k}$ beschrieben werden.

Beispiel: Der Ziehungsvorgang beim Lotto "6 aus 49" liefert zunächst eine 6–Variation der Menge $\{1, 2, \ldots, 49\}$ (wir vernachlässigen hier die Zusatzzahl). Die Anzahl dieser 6–Variationen ist $49^{\underline{6}}$. Für das Ergebnis der Ziehung ist nur die Menge der gezogenen Zahlen entscheidend und nicht die Reihenfolge in der sie gezogen wurden. Da jedes Ziehungsergebnis in 6! verschiedenen Reihenfolgen gezogen werden kann, ist die Anzahl der möglichen Ziehungsergebnisse (und damit auch die Anzahl der möglichen Tips) gleich $\frac{49^{\underline{6}}}{6!} = \binom{49}{6}$.

Eine Abwandlung des Begriffs der Mengenpartition führt zu den sogenannten Zahlpartitionen. Ist $n \in \mathbb{N}$ dann wird eine Summe $n = n_1 + \ldots + n_k$ mit $n_i \in \mathbb{N}, n_i > 0$ eine k–*Zahlpartition* von n genannt. Die Anzahl solcher Partitionen wird mit $P_{n,k}$ bezeichnet. Auch hier spielt die Reihenfolge der n_i **keine** Rolle, so daß man ohne Einschränkung $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k$ annehmen kann. Soll die Reihenfolge Berücksichtigung finden, so sprechen wir von *geordneten Zahlpartitionen*.
Achtung: Geordnete Zahlpartitionen sind also gerade solche, in denen die Summanden **nicht** nach ihrer Größe sortiert auftreten.

Lemma: Die Anzahl der geordneten k–Zahlpartitionen von n ist
$$\binom{n-1}{k-1}.$$
Beweis: Wir konstruieren eine Bijektion von der Menge S der geordneten k–Zahlpartitionen auf die Menge T der $(k-1)$–Untermengen von $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ durch:
$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k \in S \mapsto \{n_1, n_1 + n_2, \ldots, n_1 + n_2 + \ldots n_{k-1}\} \in T$. Die Bijektivität dieser Abbildung kann durch die Konstruktion der Umkehrabbildung nachgewiesen werden, und die Behauptung folgt nun aus der Gleichheitsregel.

Die hier besprochenen Zählkoeffizienten sind auch sehr gut zum Abzählen von Funktionenmengen geeignet. Sei N eine n–Menge und R eine r–Menge. Aus der Mengenlehre wissen wir, daß die Anzahl der Abbildungen von N nach R gleich r^n ist.
Ist $n \leq r$, dann sind injektive Abbildungen von N in R durch n–Variationen von R charakterisiert, d.h. $|Inj(N, R)| = r^{\underline{n}}$.

Ist $n \geq r$, dann sind surjektive Abbildungen von N auf R durch geordnete r–Partitionen von N charakterisiert, d.h. $|Surj(N, R)| = r!\,S_{n,r}$.

Die Anzahl der bijektiven Abbildungen ist $n!$ (falls $n = r$) oder 0. Klassifizieren wir die Menge aller Abbildungen $f : N \longrightarrow R$ nach ihren Bildern $A = \{f(x) \mid x \in N\} \subseteq R$, so ergibt die Summenregel:

$$\begin{aligned} r^n = \quad |Abb(N, R)| \quad &= \textstyle\sum_{A \subseteq R} |Surj(N, A)| \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{r} \ \sum_{|A|=k} |Surj(N, A)| \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{r} \ \binom{r}{k} k!\,S_{n,k} \quad = \quad \sum_{k=0}^{r} r^{\underline{k}}\,S_{n,k} \end{aligned}$$

3.3 Zwölf Arten des Abzählens

Eine zusammenfassende Interpretation der Zählkoeffizienten erhalten wir durch die folgende Fragestellung:
Sei eine Menge von n Bällen gegeben, die in r Fächer verteilt werden sollen. Gesucht ist die Anzahl solcher Verteilungen allgemein und unter der zusätzlichen Bedingung, daß nur injektive (jedes Fach höchstens ein Ball), surjektive (jedes Fach mindestens ein Ball) bzw. bijektive (jedes Fach genau ein Ball) Verteilungen zu betrachten sind. Natürlich hängt die Problemstellung auch davon ab, ob die Bälle bzw. die Fächer unterscheidbar sind oder nicht. Offensichtlich korrespondieren die obigen Abzählungen von Abbildungen zu dem Fall, daß sowohl die Bälle als auch die Fächer unterscheidbar sind. Da die Frage der bijektiven Verteilungen relativ leicht zu beantworten sind, reduziert sich die Problemstellung auf zwölf Varianten.

Sind nur die Bälle unterscheidbar, aber nicht die Fächer, dann korrespondieren surjektive Verteilungen zu r–Partitionen einer n–Menge und die Menge aller Verteilungen kann mit der Summenregel über die Klassifizierung nach Anzahl der belegten Fächer abgezählt werden.

Sind Bälle und Fächer nicht unterscheidbar, dann korrespondieren surjektive Verteilungen zu r–Zahlpartitionen von n und auch hier kann die Menge aller Verteilungen mit der Summenregel über die Klassifizierung nach Anzahl der belegten Fächer abgezählt werden.

Sind nur die Fächer unterscheidbar, aber nicht die Bälle, dann korrespondieren die surjektiven Verteilungen zu geordneten r–Zahlpartitionen von n. Die injektiven Verteilungen sind durch die Auswahl der n belegten Fächer aus der r–Menge aller Fächer vollständig charakterisiert. Eine beliebige Abbildung ist durch eine geordnete Summenzerlegung der Form $n = n_1 + \ldots + n_r$ mit $n_i \in \mathbb{N}$ charakterisiert. Um daraus eine r–Zahlpartition im Sinne der Definition zu machen (Zusatzbedingung $n_i \geq 1$) addiert man zu jedem Summanden eine 1. Damit erhalten wir eine Bijektion auf die Menge der geordneten r–Zahlpartitionen von $(n + r)$. Diese Menge hat $\binom{n+r-1}{r-1}$ Elemente.

Die folgende Tabelle gibt einen vollständigen Überblick.

	beliebig	injektiv	surjektiv	bijektiv
N unterscheidbar R unterscheidbar	r^n	$r^{\underline{n}}$	$r!S_{n,r}$	0 oder $n!$
N nicht untersch. R unterscheidbar	$\binom{n+r-1}{r-1}$	$\binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	0 oder 1
N unterscheidbar R nicht untersch.	$\sum_{k=1}^{r} S_{n,k}$	0 oder 1	$S_{n,r}$	0 oder 1
N nicht untersch. R nicht untersch.	$\sum_{k=1}^{r} P_{n,k}$	0 oder 1	$P_{n,r}$	0 oder 1

3.4 Rekursionen

Pascalsches Dreieck

Oft ist es schwierig, für die zu untersuchenden kombinatorischen Größen $f(n)$ eine geschlossene Formel anzugeben, z.B. für die Stirling Zahlen zweiter Art $S_{n,k}$. In solchen Fällen kann eine Rekursion, das ist eine Formel, die $f(n)$ auf $f(n-1)$ und/oder $f(n-2), \ldots$ zurückführt, ein wirkungsvolles Hilfsmittel sein. Sind dann noch die benötigten Anfangswerte $f(0)$ und/oder $f(1)$ bekannt, kann man jedes $f(n)$ effektiv berechnen.
Wir haben bereits eine Rekursion für die Binomialkoeffizienten kennengelernt:
$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ für alle $n, k > 0$.
Mit den trivialen Zusatzinformationen $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{k} = 0$ falls $k > n$, können alle Binomalkoeffizienten berechnet werden. Das dafür verwendete Schema wird *Pascalsches Dreieck* genannt:

n k	0	1	2	3	4	5	6...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
:							

Es ist klar, daß die Summe aller Einträge in der n–ten Zeile die Anzahl aller Untermengen einer n–Menge ergibt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Die folgenden zwei Identitäten machen Aussagen über Spalten- und Diagonalsummen, die an einer beliebigen Stelle abzubrechen sind:

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \text{für alle } n, k \geq 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n} \qquad \text{für alle } m, n \geq 0$$

Beide Formeln kann man mit vollständiger Induktion und auch durch kombinatorische Argumentationen beweisen. Einige Identitäten dieser Art liefern auch wichtige Aussagen für Polynome. Dazu muß man einen oder mehrere Parameter der Zählkoeffizienten durch Polynomvariable (über den komplexen Zahlen) ersetzen.Setzt man $x^{\underline{k}} = x(x-1)\ldots(x-k+1)$, dann kann man auch $\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!}$ als Polynom vom Grad k ansehen. Wie uns bekannt ist, sind zwei Polynome vom Grad k genau dann gleich, wenn ihre Werte an mindestens $k+1$ Stellen übereinstimmen. Da die Rekursion der Binomialkoeffizienten auch für alle natürlichen Zahlen $n \geq k$ bewiesen ist, müssen auch die entsprechenden Polynome gleich sein,also:

$$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k} + \binom{x-1}{k-1} .$$

Auch die sogenannte *Vandermonde Identität* kann mit dieser Polynommethode bewiesen werden:

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$$

Wieder folgt die Gleichheit dieser Polynome aus dem Fakt, daß ihre Werte an unendlich vielen Stellen (nämlich für alle $x, y \in \mathbb{N}$) übereinstimmen. Der Fakt selbst kann mit der Summenregel begründet werden:
Seien $x, y \in \mathbb{N}$ und X, Y zwei disjunkte Mengen mit $|X| = x, |Y| = y$. Auf der linken Seite der Vandermonde Identität steht dann die Anzahl aller n–Kombinationen von $X \cup Y$. Wir klassifizieren solche n–Kombinationen nach der Anzahl k der Elemente aus X. Dann besteht die Klasse S_k aus allen n–Kombinationen mit k Elementen aus X und $n - k$ Elementen aus Y. Nach der Produktregel ist $|S_k| = \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$ und die Behauptung folgt aus der Summenregel.
Binomialsatz: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$
Der induktive Beweis nutzt die Rekursion der Binomialkoeffizienten.

Als unmittelbare Folgerung aus dem Binomialsatz erhalten wir die folgenden zwei Formeln:

$$(x + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Rekursion für die Stirling Zahlen zweiter Art

Satz: Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k > 0$ gilt $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$.
Man beachte, daß diese Formel eine große Ähnlichkeit mit der Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten aufweist. Auch der Beweis ist sehr ähnlich:

Sei a ein fest gewähltes Element der n–Menge N. Die k–Partitionen von N können nun danach klassifiziert werden, ob $\{a\}$ einen Block der Partition bildet oder nicht. Bei positiver Antwort kann der Partition auf eineindeutige Weise (Streichung von $\{a\}$) eine $(k - 1)$–Partition von $N \setminus \{a\}$ zugeordnet werden. Zur Begründung des zweiten Summanden überlegt man sich, das man alle k–Partitionen von N, in denen $\{a\}$ keinen Block bildet, auf folgende Art erhält: Man betrachte alle k–Partitionen von $N \setminus \{a\}$ und ergänze eine ihrer Klassen um a (dafür gibt es jeweils k Möglichkeiten).

Aus der Definition ergeben sich die Anfangsbedingungen $S_{n,0} = 0$ für $n > 0$ und $S_{0,k} = 0$ für $k > 0$. Wie man leicht sieht, muß $S_{0,0} = 1$ gesetzt werden, damit die Formel auch für $S_{1,1}$ ihre Gültigkeit behält.

Lösung von Rekursionen

In diesem Abschnitt werden zwei Methoden beschrieben, mit deren Hilfe man (in einigen Fällen) aus Rekursionen geschlossene Formeln ableiten kann. Wir beginnen mit Rekursionen der Form

$$a_n = ca_{n-1} + d,\ a_0 = C, \qquad c, d, C \in \mathbb{R}$$

Offensichtlich können wir $c = 1$ als Trivialfall (dann ist $a_n = nd + C$) ausschließen. Für $c \neq 1$ erhalten wir durch elementare Umformungen:

$$\begin{aligned}
a_n &= d + ca_{n-1} &&= d + c(d + ca_{n-2}) \\
&= d + cd + c^2a_{n-2} &&= d + cd + c^2(d + ca_{n-3}) \\
&= \ldots &&= d + cd + c^2d + \ldots + c^{n-1}d + c^na_0 \\
& &&= \frac{c^n-1}{c-1}d + c^nC
\end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt sogenannte *homogene lineare Rekursionen von Grad k*, das sind Rekursionen der Form

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$$

wobei $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ und $c_k \neq 0$ vorausgesetzt sind. Darüber hinaus sollen die reelle Zahlen als Anfangsbedingungen $a_0 = C_0, \ldots,$
$a_{k-1} = C_{k-1}$ bekannt sein.

Der Basisansatz besteht darin, eine Lösung der Form $a_n = r^n$ für eine Konstante r zu suchen. Gäbe es eine solche Lösung, dann wäre $r^n = c_1r^{n-1} + c_2r^{n-2} + \ldots + c_kr^{n-k}$, also wäre r eine Nullstelle des sogenannten *charakteristischen Polynoms* $x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} \ldots - c_k$ der Rekursion. Eine solche Lösung könnte aber in Widerspruch zu den Anfangsbedingungen stehen.

Satz: Angenommen, das charakteristische Polynom der Rekursion
$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ hat k verschiedene Nullstellen $r_1, \ldots, r_k$. Dann gibt es Konstanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, so daß

$$a_n = \alpha_1r_1^n + \ldots \alpha_kr_k^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Diese Konstanten sind durch die k Anfangsbedingungen $a_0 = C_0, \ldots,\ a_{k-1} = C_{k-1}$ eindeutig bestimmt.

Wir verzichten auf den Beweis. Es sei aber angemerkt, daß zur Bestimmung der Konstanten ein lineares Gleichungssystem von k Gleichungen (jeder Anfangswert liefert eine Gleichung) mit den gesuchten Konstanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ als Variable gelöst werden muß. Die Verschiedenheit der Nullstellen sichert, daß dieses LGS eine eindeutige Lösung besitzt.

Beispiel: Die Rekursion $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ mit den Anfangsbedingungen $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ beschreibt die sogenannten *Fibonacci Zahlen*.
Das charakteristische Polynom dieser Rekursion hat die Form
$x^2 - x - 1$. Die Nullstellen dieses Polynoms sind $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

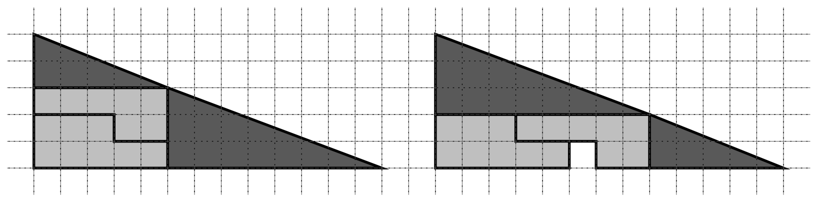
Zur Bestimmung der Konstanten α_1 und α_2 muß das folgende LGS gelöst werden:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \quad\ \ \alpha_2 &= 0 \\
\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\alpha_2 &= 1
\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\alpha_2 = -\alpha_1$. Verwendet man diese Substitution in der zweiten Gleichung, dann ergibt sich $\sqrt{5}\alpha_1 = 1$, also $\alpha_1 = 1/\sqrt{5}$. So erhält man folgende geschlossene Formel für die Fibonacci Zahlen:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Aus dieser Formel kann man sehr gut das exponentielle Wachstum der Fibonacci Zahlen und ihr Konvergenzverhalten ablesen. Eine geometrische Demonstration findet man in der folgenden Abbildung:



Aus vier Puzzleteilen wird jeweils ein 5×13 Dreieck zusammengesetzt, aber im rechten Dreieck bleibt ein Feld frei. Wie kann man das erklären?
Beim genaueren Hinsehen oder besser beim Nachrechnen entdeckt man, dass die Hypotenusen der beiden kleinen Dreiecke verschiedene Anstiege haben und somit keine Gerade bilden: $\frac{2}{5} = 0,4$ und $\frac{3}{8} = 0,375$. Unter Berücksichtigung von $2 = f_3,\ 3 = f_4,\ 5 = f_5$ und $8 = f_6$ erhält man eine geometrische Idee davon, dass sich die Quotieten f_3/f_5 und f_4/f_6 nur wenig unterscheiden.

3.5 Das Schubfachprinzip

In den bisherigen Themen zur Kombinatorik ging es immer um die genaue Bestimmung von bestimmten Werten. Es kommt aber auch vor, dass die Informationen über bestimmte Mengen nicht ausreichen, um genaue Angaben über ihre Größe machen zu können. Oft muss man sich solchen Fällen damit zufrieden geben, möglichst gute obere und untere Schranken für die Größe zu kennen. Eine grundlegende und wichtige Methode zur Herleitung solcher Ungleichungen mit kombinatorischen Mitteln besteht in der Anwendung des sogenannten Schubfachprinzips.

Das *Schubfachprinzip*, in der englischsprachigen Literatur auch als *Taubenschlagprinzip* bezeichnet, geht auf den Mathematiker G. L. Dirichlet zurück:

Verteilt man n Gegenstände in k Schubfächer und ist $n > k$, dann gibt es mindestens ein Schubfach, in dem mindestens 2 Gegenstände liegen.

Auf den ersten Blick scheint dieses Prinzip nur triviale Schlußfolgerungen zuzulassen, wie: “in jeder Gruppe von 366 Menschen gibt es mindestens zwei, die den gleichen Geburtstag haben”, aber wie die folgenden eleganten Anwendungen zeigen, trügt der Schein.

Satz: In jeder $n+1$ elementigen Untermenge M von $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ gibt es zwei Zahlen a und b, so daß a Teiler von b ist.

Beweis: Sei $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$. Jedes Element dieser Menge hat eine eindeutige Produktzerlegung der Form $a_i = 2^{k_i} q_i$ wobei q_i eine ungerade Zahl ist. Da die Anzahl der ungeraden Zahlen zwischen 1 und $2n$ gleich n ist, müssen mindesten zwei Elemente aus M bei der Zerlegung die gleiche ungerade Zahl liefern, und es ist klar, daß dann die kleinere von beiden ein Teiler der größeren ist.

Satz von Erdös/Szekeres: Jede Folge von $n^2 + 1$ verschiedenen Zahlen enthält eine monoton wachsende oder monoton fallende Unterfolge der Länge $n + 1$.

Beweis: Ist die Folge $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ gegben, dann hat eine Unterfolge der Länge m die Form $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}$ wobei $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq n^2 + 1$ gelten muß. Die Unterfolge ist monoton wachsend (fallend) wenn auch $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_m} \quad (>)$ gilt.
Angenommen die gegebene Folge hat keine monoton wachsende oder monoton fallende Unterfolge der Länge $n+1$, dann ordnen wir jedem $k = 1, 2, \ldots, n^2+1$ ein Paar (w_k, f_k) zu, wobei w_k (f_k) die maximale Länge einer monoton wachsenden (fallenden) Unterfolge ist, die mit a_k beginnt. Da nur n^2 Paare möglich sind, muß mindestens ein Paar mehrfach auftreten, d.h. es gibt Zahlen $1 \leq s < t \leq n^2 + 1$, so daß $w_s = w_t$ und $f_s = f_t$. Das ist aber bereits ein Widerspruch, denn ist $a_s < a_t$, dann könnte jede mit a_t beginnende monoton wachsende Unterfolge von vorn durch a_s verlängert werden, also wäre $w_s > w_t$. Analog folgt aus $a_s > a_t$ auch $f_s > f_t$ und $a_s = a_t$ ist nach Voraussetzung nicht möglich.

Verallgemeinerung des Schubfachprinzips: Verteilt man n Gegenstände in k Schubfächer, dann gibt es mindestens ein Schubfach, in dem mindestens $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ Gegenstände liegen.

Beispiel: In jeder Gruppe von 100 Menschen gibt es mindestens 9, die das gleiche Sternzeichen haben.