Mathematik für Informatiker I im WS08/09

Probeklausur

Name: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	Gesamt
Punkte	/8	/6	/4 + 4	/8	/8	/34 + 4

Wichtige Hinweise:

1) Die Klausur wurde im Sommersemester 2008 im Rahmen der Veranstaltungsreihe Pro-Informatik geschrieben. Umfang und Schwierigkeitsgrad der Klausur am 19.02.09 werden vergleichbar sein.

2) Wenn man die PDF–Datei zweiseitig druckt und auf der linken Seite heftet, bieten die eingeschobenen Leerseiten genug Platz für das Aufschreiben der Lösungen ohne blättern zu müssen.

3) Alle Lösungen sind kurz (stichpunktartig), aber inhaltlich ausreichend zu kommentieren!

4) Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist ein **einseitig, handschriftlich** gefülltes A4-Blatt mit Fakten und Formeln eigener Wahl.

Aufgabe 1: **Logik** $2+3+3$ **Punkte**

a) Untersuchen Sie, ob die mit | bezeichnete NAND-Operation (Negation der Konjunktion) assoziativ ist. Sie können dazu die vorbereitete Tabelle verwenden.

x_1	x_2	x_3	
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Die Operation | **ist / ist nicht** (nichtzutreffendes Streichen) assoziativ, weil ......

b) Bilden Sie die zur Formel $(x_1|x_2)|x_3$ äquivalente kanonische DNF. Finden Sie eine vereinfachte DNF durch Termzusammenfassung.

c) Untersuchen Sie **mit dem Resolutionskalkül**, ob die folgende Formel eine Tautologie ist.

$$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge \neg x_3)$$

Aufgabe 2: **Äquivalenzrelationen** $2+4$ **Punkte**

Gegeben ist die Menge M aller 4-Tupel mit Werten aus $\{a,b,c\}$, d.h. $M = \{a,b,c\}^4$. Auf dieser Menge M betrachten wir die folgenden Relationen R, S, T:

$(x_1,x_2,x_3,x_4)\ R\ (y_1,y_2,y_3,y_4) \iff x_1 = y_1$ und $x_4 = y_4$
d.h. gleiche Anfangs- und gleiche Endwerte

$(x_1,x_2,x_3,x_4)\ S\ (y_1,y_2,y_3,y_4) \iff x_1 = y_1$ oder $x_4 = y_4$
d.h. gleiche Anfangs- oder gleicher Endwerte

$(x_1,x_2,x_3,x_4)\ T\ (y_1,y_2,y_3,y_4) \iff$ beide Tupel haben die gleiche Anzahl von a's

a) Welche dieser Relationen sind **keine** Äquivalenzrelationen? Begründen Sie Ihre Antwort indem Sie (an konkreten Zahlen) zeigen, welche Eigenschaft verletzt ist. Für die Äquivalenzrelationen sind keine Begründungen notwendig!

b) Für alle Äquivalenzrelationen aus der obigen Liste interessieren wir uns für die Anzahl der Äquivalenzklassen. Außerdem betrachten wir die jeweilige Äquivalenzklasse des Tupels (a,a,b,c). Bestimmen Sie, wie groß diese Klassen sind, d.h. wieviele Tupel jeweils zu (a,a,b,c) äquivalent sind.

Relation	**Anz. der Äquivalenzkl.**	**Größe d. Äquivalenzkl. von** (a,a,b,c)

Aufgabe 3: **Induktion und Rekursion** $4+4$ **Punkte**

a) Beweisen Sie die folgende Identität mit vollständiger Induktion über n:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n} \qquad \text{für alle } n, m \geq 0$$

b) **Zusatzaufgabe:** Eine rekursive Folge a_n ist definiert durch die Verankerung $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ und die Rekursionsgleichung $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$. Finden Sie eine geschlossene Formel für a_n.

Aufgabe 4: **Graphen** $3 + 3 + 2$ **Punkte**

Wir betrachten die Graphen G_n und H_n, deren Knotenmenge alle n-stelligen Dezimalzahlen (erste Stelle ungleich Null) sind.
Zwei Zahlen sind adjazent in G_n, wenn sie sich an genau einer Stelle unterscheiden.
Zwei Zahlen sind adjazent in H_n, wenn sie sich an genau einer Stelle unterscheiden und der Unterschied zwischen den beiden Ziffern an dieser Stelle genau Eins ist.

a) Wieviele Knoten und wieviele Kanten haben die Graphen G_1 und G_2. Wieviel Kanten hat der Graph G_n allgemein (kurze Begründung)?

b) Wieviele Knoten und wieviele Kanten haben die Graphen H_1 und H_2. Wieviel Kanten hat der Graph H_n allgemein (kurze Begründung)?

c) Welche Durchmesser haben die Grahen G_n und H_n?

Aufgabe 5: **Kombinatorik und Wahrscheinlichkeiten** 8 **Punkte**

Ein Radiosender hat 100 Freikarten für einen Kinobesuch verlost. An dem Abend laufen die 6 Filme A, B, C, D, E, F und für jeden der 100 Gewinner wird mit einem Würfel entschieden, welchen Film er sehen darf (fairer Würfel, unabhängige Würfe). Alle Antworten auf die folgenden Fragen können in Form von Ausdrücken wie z.B. 2^{100} oder $100^6 \cdot \binom{100}{6}$ gegeben werden.

a) Wieviele Verteilungen der 100 (unterscheidbaren) Gewinner auf die 6 Filme sind möglich und wieviele Verteilungen gibt es, wenn man die Gewinner nicht unterscheidet?

unterscheidbar: nicht unterscheidbar:

b) Alice, Bob und Carol gehören zu den Gewinnern. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Alice und Bob den gleichen Film sehen und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei den gleichen Film sehen? Bitte eine kurze Begründung!

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Film F von keinem der 100 Gewinner besucht wird? Bitte eine kurze Begründung!

d) Jeder Gewinner hat genau zwei persönliche Wunschfime. Wie groß ist der Erwartungswert für die Anzahl der Gewinner, die einen ihrer Wunschfilme sehen? Auch hier bitte eine kurze Begründung!