**FU Berlin, Institut für Informatik, WS 2007/08**

# Brückenkurs Mathematische Grundlagen

**für Bioinformatik- , Informatik- und Nebenfach-Studenten**

## 1 Aussagenlogik

Eine logische Aussage ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch (also nie beides zugleich) ist. Es ist üblich, für diese Wahrheitswerte Symbole zu verwenden: 1 (alternativ auch $w$ oder $t$ von wahr/true) für wahre Aussagen und 0 (alternativ auch $f$ von falsch/false). Bei elementaren Aussagen wie *"7 ist eine Primzahl", "entgegengesetzte Ladungen ziehen sich an"* oder *"London ist die Hauptstadt von Frankreich"* ist die Zuordnung des Wahrheitswerts klar und auch nicht Gegenstand der Logik sondern der entsprechenden Einzelwissenschaft. Durch Verwendung von Verknüpfungswörtern wie *und, oder, nicht, wenn ... dann* können aus elementaren Aussagen sehr komplexe Aussagen erzeugt werden.
Die Untersuchung der Wahrheitswerte solcher zusammengesetzter Aussagen war der Ausgangspunkt zur Entwicklung der mathematischen Logik.

**Definition:** Eine Aussage ist ein Satz (ein formalsprachliches Gebilde) mit einem eindeutigen Wahrheitswert 1 (wahr) oder 0 (falsch).

**Beispiele:**

1. Der Satz *"7 ist eine Primzahl."* und der Satz *"7 ist eine ungerade Zahl."* sind wahre Aussagen. Dagegen ist der Satz *"7 ist eine gerade Zahl."* eine falsche Aussage. Genauer gesehen ist der letzte Satz die Negation des zweiten Satzes, denn *nicht ungerade* zu sein, ist (zumindest für ganze Zahlen) das gleiche, wie *gerade* zu sein.

2. Der Satz *"7 ist eine Primzahl und 7 ist ungerade."* sowie der Satz *"7 ist eine Primzahl oder 7 ist gerade."* sind wahre Aussagen. Achtung: Auch der Satz *"7 ist eine Primzahl oder 7 ist ungerade."* ist eine wahre Aussage, denn das logische *oder* ist kein ausschließendes *entweder oder*. Dagegen ist der Satz *"7 ist eine Primzahl und 7 ist gerade."* eine falsche Aussage, denn die zweite Aussage ist falsch.

3. Der Satz *"$\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl."* ist – wie man aus der Schulmathematik weiß – eine falsche Aussage, aber es bedarf schon einiger Überlegungen, um das zu zeigen.

4. Der Satz *"Jede gerade natürliche Zahl $> 2$ ist die Summe zweier Primzahlen"* ist eine Aussage, denn entweder es gibt eine gerade Zahl, die sich nicht als Summe zweier Primzahlen darstellen lässt (dann ist die Aussage falsch), oder es gibt keine solche Zahl (dann ist die Aussage wahr). Man nimmt zwar an, dass die Aussage wahr ist (Goldbach-Vermutung), konnte das aber bisher noch nicht beweisen.

5. Der Satz *"Dieser Satz ist falsch."* ist als Russels Paradoxon bekannt. Durch die spezielle Art des Bezugs auf sich selbst kann er weder wahr noch falsch sein und ist deshalb **keine** Aussage.

Wie wir in Punkt 2 gesehen haben, bestimmt sich der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage ausschließlich aus den Wahrheitswerten der Ausgangskomponenten. Deshalb ist es sinnvoll, Aussagevariablen einzuführen und die Wahrheitwerte von zusammengesetzten Aussagen durch sogenannte Wahrheitsswerttabellen (kurz Wahrheitstafeln) zu beschreiben.
Die Negation einer Aussage $p$ wird mit $\neg(p)$ bezeichnet. Diese Operation kehrt den Wahrheitswert von $p$ um, d.h. man kann sie als Wahrheitswertfunktion
$\neg : \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}$ mit $\neg(0) = 1$ und $\neg(1) = 0$ auffassen.
Analog können Verknüpfungen von zwei Aussagen $p$ und $q$, wie
die *Konjunktion* $p \wedge q$ (gesprochen "$p$ *und* $q$"),
die *Disjunktion* $p \vee q$ (gesprochen "$p$ *oder* $q$"),
die *Implikation* $p \rightarrow q$ (gesprochen "*aus* $p$ $folgt$ $q$" oder"*wenn* $p$, *dann* $q$" ),
die *Äquivalenz* $p \leftrightarrow q$ (gesprochen "$p$ *genau dann, wenn* $q$"),
die *Antivalenz* $p \oplus q$ (gesprochen "*entweder* $p$ *oder* $q$")
durch Funktionen von $\{0,1\} \times \{0,1\}$ nach $\{0,1\}$ charakterisiert werden.:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow q$ | $p \oplus q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Aus der Tabelle kann man ablesen, dass die Konjunktion $p \wedge q$ dann und nur dann wahr ist, wenn beide Aussagen $p$ und $q$ wahr sind. Die Disjunktion $p \vee q$ ist dann und nur dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen $p$ und $q$ wahr ist. Die Implikation ist dann und nur dann wahr, wenn $p$ falsch oder $q$ wahr ist. Versuchen Sie selbst, die Äquivalenz und die Antivalenz verbal zu beschreiben! Zur Vereinfachung der Notation vereinbart man, dass Außenklammern weggelassen werden können und in der Reihenfolge $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ jeder Junktor stärker trennt als alle vorangehenden. Man kann also $\neg p_1 \vee p_2 \wedge p_3$ für $((\neg p_1) \vee (p_2 \wedge p_3))$ schreiben.

Ausdrücke, die durch (wiederholtes) Anwenden der Verknüpfungsoperationen aus Variablen gewonnen werden, nennt man Formeln der Booleschen Aussagenlogik. Legt man für alle in einer Formel auftretenden Variablen Wahrheitswerte fest, so induziert

diese sogenannte Belegung auch einen Wahrheitswert für die Formel. Man nennt diesen induktiven Prozess auch Auswertung der Formel. Die Ergebnisse der Auswertungen einer Formel unter allen möglichen Belegungen werden in einer Wahrheitstafel zusammengefasst.
**Definition:** Zwei Formeln $\alpha$ und $\beta$ sind logisch äquivalent, wenn jede beliebige Belegung der Variablen für beide Formeln den gleichen Wahrheitswert induziert. Wir schreiben dafür $\alpha \equiv \beta$.

Die Äquivalenz von zwei Formeln kann prinzipiell durch Wahrheitstafeln überprüft werden. Praktisch sind diesem Verfahren enge Grenzen gesetzt, weil die Anzahl der Belegungen (also der Zeilen der Tabelle) exponentiell bezüglich der Anzahl der Variablen wächst.
**Beispiel:** Man stelle fest, ob die Formeln $\alpha = \neg(p_1 \vee ((p_1 \vee p_2) \wedge p_2)$ und $\beta = \neg p_1 \wedge \neg p_2$ logisch äquivalent sind!

| $p_1$ | $p_2$ | $p_1 \vee p_2$ | $(p_1 \vee p_2) \wedge p_2$ | $p_1 \vee ((p_1 \vee p_2) \wedge p_2)$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

| $p_1$ | $p_2$ | $\neg p_1$ | $\neg p_2$ | | $\beta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | | 0 |

Wie man sieht (Spaltenvergleich), ist der Wahrheitswerteverlauf für $\alpha$ und $\beta$ identisch, die Formeln sind also äquivalent.

**Definition:** Eine Formel $\alpha$ wird erfüllbar genannt, wenn es eine Belegung der Variablen von $\alpha$ gibt, die für $(\alpha)$ den Wert 1 induziert. Die Formel $\alpha$ wird *allgemeingültig, logisch gültig* oder eine *Tautologie* genannt, wenn sie für jede Belegung den Wert 1 annimmt. Eine Formel, die unerfüllbar ist, wird *Kontradiktion* genannt.

**Satz:** Für beliebige Formeln $\alpha, \beta, \gamma$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$
\begin{array}{rcll}
(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma & \equiv & \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) & \\
(\alpha \vee \beta) \vee \gamma & \equiv & \alpha \vee (\beta \vee \gamma) & \text{(Assoziativität)} \\
\alpha \wedge \beta & \equiv & \beta \wedge \alpha & \\
\alpha \vee \beta & \equiv & \beta \vee \alpha & \text{(Kommutativität)} \\
\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) & \equiv & (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) & \\
\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) & \equiv & (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) & \text{(Distributivität)} \\
\alpha \wedge \alpha & \equiv & \alpha & \\
\alpha \vee \alpha & \equiv & \alpha & \text{(Idempotenz)} \\
\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) & \equiv & \alpha & \\
\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) & \equiv & \alpha & \text{(Absorbtion)} \\
\neg(\alpha \wedge \beta) & \equiv & \neg\alpha \vee \neg\beta & \\
\neg(\alpha \vee \beta) & \equiv & \neg\alpha \wedge \neg\beta & \text{(deMorgansche Regel)} \\
\neg\neg\alpha & \equiv & \alpha & \text{(Doppelnegation)}
\end{array}
$$

Weitere Regeln:

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & \alpha \to \beta & \equiv & \neg\alpha \vee \beta \\
(2) & \alpha \leftrightarrow \beta & \equiv & \alpha \wedge \beta \vee \neg\alpha \wedge \neg\beta \\
(3) & \alpha \to \beta \wedge \gamma & \equiv & (\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \to \gamma) \\
(4) & \alpha \to \beta \vee \gamma & \equiv & (\alpha \to \beta) \vee (\alpha \to \gamma) \\
(5) & \alpha \wedge \beta \to \gamma & \equiv & (\alpha \to \gamma) \vee (\beta \to \gamma) \\
(6) & \alpha \vee \beta \to \gamma & \equiv & (\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)
\end{array}
$$

**Definition:** Ein *Prädikat* ist eine Aussageform, die eine (oder mehrere) Variable enthält, so dass bei Ersetzung der Variablen durch Elemente aus einem gegebenen Individuenbereich $U$ eine Aussage mit eindeutig bestimmten Wahrheitswert entsteht.

Z.Bsp. "$x = 0$" oder "$x + 0 = x$" oder "$x + y = x$" für den Bereich der ganzen Zahlen.
Die Belegung der Variablen durch konkrete Objekte ermöglicht somit (durch Betrachtung eines Spezialfalls), ein Prädikat in eine Aussage umzuwandeln.
Quantoren erlauben es, aus diesen Spezialfällen allgemeinere Aussagen abzuleiten:
Durch das Hinzufügen der Wendungen "für alle ..." (symbolisch durch den Allquantor $\forall$) oder "es gibt ein ..." (symbolisch durch den Existenzquantor $\exists$) werden die Variablen in einem Prädikat gebunden.
Die Ausssage "$\forall x \in U : \ P(x)$" ist wahr, wenn für jedes Element $a \in U$ die Aussage $P(a)$ wahr ist.
Dagegen ist "$\exists x \in U : \ P(x)$" eine wahre Aussage, wenn (mindestens) ein Element $a \in U$ existiert, so dass die Aussage $P(a)$ wahr ist.

**Beispiele**: Die Aussagen "$\forall x \in \mathbb{N} : \ x + 0 = x$" und "$\exists x \in \mathbb{N} : \ x^2 = x$" sind wahr, die Aussagen "$\exists x \in \mathbb{N} : \ x + 1 = x$" und "$\forall x \in \mathbb{N} : \ x^2 = x$" sind falsch.

**Satz:** Für beliebige Prädikate $P(x)$ und $Q(x)$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
\neg\forall x\ P(x) &\equiv \exists x \neg P(x) \\
\neg\exists x\ P(x) &\equiv \forall x \neg P(x) \\
\forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x) &\equiv \forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \\
\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x) &\equiv \exists x\ (P(x) \vee Q(x)) \\
\forall x \forall y\ P(x) &\equiv \forall y \forall x\ P(x) \\
\exists x \exists y\ P(x) &\equiv \exists y \exists x\ P(x)
\end{aligned}$$

**Achtung:** Die folgenden Formelpaare sind im allgemeinen nicht äquivalent:

$(\forall x\ \alpha \vee \forall x\ \beta)$ *und* $\forall x\ (\alpha \vee \beta)$

$(\exists x\ \alpha \wedge \exists x\ \beta)$ *und* $\exists x\ (\alpha \wedge \beta)$

# 2 Mengen

Nach G. Cantor ist eine *Menge* "eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente der Menge genannt werden) zu einem Ganzen".
Der Sachverhalt, daß ein Objekt $a$ Element einer Menge $A$ ist, wird durch $a \in A$ dargestellt, anderenfalls schreibt man $a \notin A$. Zwei Mengen $A$ und $B$ sind *gleich*, wenn sie die gleichen Elemente besitzen, d.h. wenn für alle $a$ gilt: $a \in A$ dann und nur dann, wenn $a \in B$. Wir schreiben dann: $A = B$.

**Darstellungen von Mengen**

a) Mengen können durch *Auflistung ihrer Elemente* in geschweiften Klammern dargestellt werden. Das betrifft insbesondere endliche Mengen, wie z.B. $A = \{2, 3, 5, 7\}$ oder $B = \{rot, gelb, blau\}$. Dabei ist die Reihenfolge der Elemente in der Auflistung ohne Bedeutung. Auch die Mehrfachnennung von Elementen ist erlaubt, sie hat aber nur Einfluß auf die Darstellung der Menge und nicht auf die Menge selbst, z.B. $\{2, 3, 5, 7\} = \{5, 7, 3, 2, 2, 5, 2\}$.
Wir vereinbaren, daß auch unendliche Mengen durch Auflistung dargestellt werden können, sofern dies unmissverständlich ist, wie z.B. $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ für die natürlichen Zahlen oder $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ für die positiven, geraden Zahlen.

b) Die in der Mathematik gebräuchlichste Darstellungsform von Mengen beruht auf dem sogenannten *Abstraktionsprinzip*, nach dem man Mengen – im Sinne der Cantorschen Definition – durch wohlbestimmte Eigenschaften definieren kann. Dazu werden Prädikate $P(x)$ über einem festgelegten Individuenbereich benutzt. Dann wird mit $\{x \mid P(x)\}$ die Menge bezeichnet, die sich aus allen Individuen $a$ aus dem Bereich zusammensetzt, für die $P(a)$ wahr ist.

c) Zur Veranschaulichung können Mengen durch sogenannte *Venn–Diagramme* als Kreisscheiben oder andere Flächen in der Ebene dargestellt werden.

**Definition:** Eine Menge $A$ ist *Teilmenge* (oder *Untermenge*) einer Menge $B$ (Schreibweise $A \subseteq B$), wenn aus $a \in A$ auch $a \in B$ folgt. Es gilt $A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$. Außerdem folgt aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ auch $A \subseteq C$.
**Definition:** Zwei Mengen $A$ und $B$ sind *disjunkt*, wenn sie keine gemeinsamen Elemente besitzen, d.h wenn aus $a \in A$ folgt $a \notin B$.

**Definition:** Die *Vereinigung* $A \cup B$ der Mengen $A$ und $B$ besteht aus allen Mengen, die Elemente von $A$ oder von $B$ sind, dh. $A \cup B = \{x \mid x \in A \textit{ oder } x \in B\}$.
**Definition:** Der *Durchschnitt* $A \cap B$ der Mengen $A$ und $B$ besteht aus allen Mengen, die Elemente von $A$ und von $B$ sind, dh. $A \cap B = \{x \mid x \in A \textit{ und } x \in B\}$.
**Definition:** Die *Differenz* $A \setminus B$ der Mengen $A$ und $B$ besteht aus allen Mengen, die Elemente von $A$ aber nicht von $B$ sind, dh. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \textit{ und } x \notin B\}$
**Definition:** Die Menge, die kein Element enthält, wird *leere Menge* genannt und mit $\emptyset$ bezeichnet.
Oft ist es sinnvoll, den zu betrachtenden Individuenbereich festzulegen, z.B. wenn man nur Mengen von natürlichen Zahlen betrachten will. Ein solcher Bereich wird

*Universum* genannt und oft mit $U$ bezeichnet. Es ist klar, daß Aussageformen über $U$ immer Teilmengen von $U$ definieren. Ist $A$ Teilmenge eines festgelegten Universums $U$, dann ist das *Komplement* von $A$ definiert als $U \setminus A$. Es wird mit $\overline{A}$ bezeichnet.

**Satz:** Die Standardäquivalenzen von Aussagen übertragen sich auf entsprechende Identitäten von zusammengesetzten Mengen. Insbesondere gelten die folgenden Identitäten für alle Untermengen $A, B, C$ eines Universums $U$:

| | |
|---|---|
| Kommutativität: | $A \cup B = B \cup A$ |
| | $A \cap B = B \cap A$ |
| Assoziativität: | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ |
| | $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ |
| Distributivität: | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| Idempotenz: | $A \cup A = A$ |
| | $A \cap A = A$ |
| Dominanz: | $A \cup U = U$ |
| | $A \cap \emptyset = \emptyset$ |
| Identität: | $A \cup \emptyset = A$ |
| | $A \cap U = A$ |
| De Morgan'sche Regel: | $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ |
| | $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ |
| Komplementierung: | $A \cup \bar{A} = U$ |
| | $A \cap \bar{A} = \emptyset$ |
| | $\overline{(\bar{A})} = A$ |
| | $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ |

Auf Grund der Assoziativität ist kann man bei der Vereinigung (bzw. beim Durchschnitt) von $n$ Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ auf Klammerungen vezichten und die folgende Schreibweise nutzen:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

**Definition:** Ist $I$ eine beliebige Menge und ist für jedes $i \in I$ eine Menge $A_i$ gegeben, dann nennen wir die Menge dieser Mengen eine *Mengenfamilie* und bezeichnen sie durch $\{A_i \mid i \in I\}$. Die Vereinigung (bzw. der Durchschnitt) dieser Mengenfamilie ist definiert durch

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \text{es gibt ein } i \in I, \text{ so dass } x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \text{für alle } i \in I, \text{ gilt } x \in A_i\}$$

**Definition:** Eine Familie $\{A_i \mid i \in I\}$ von nichtleeren Mengen $A_i$ wird *Partition* oder auch *Zerlegung* einer Menge $A$ genannt, falls
1) $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ und
2) Für beliebige, voneinander verschiedene $i, j \in I$ gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Hier sind noch zwei Möglichkeiten, aus Mengen neue Mengen zu konstruieren.

**Definition:** Ist $A$ eine Menge, dann wird die Menge aller Untermengen von $A$ die Potenzmenge von $A$ genannt und mit $\mathcal{P}(A)$ bezeichnet.

**Definition:** Ein *geordnetes Paar* $(a, b)$ ist eine (den Objekten $a$ und $b$ zugeordnetes) Konstrukt mit der folgenden Eigenschaft: $(a, b) = (a', b')$ genau dann, wenn $a = a'$ und $b = b'$

**Definition:** Das *kartesische Produkt* $A \times B$ von zwei Mengen $A$ und $B$ ist definiert als die Menge aller geordneten Paare $(a, b)$ mit $a \in A$ und $b \in B$.

# 3 Relationen

**Definition:** Eine Untermenge $R$ eines kartesischen Produkts $A \times B$ wird *(binäre) Relation* zwischen $A$ und $B$ genannt. Für $(a, b) \in R$ kann auch $a\,R\,b$ geschrieben werden. Eine Untermenge $R$ eines kartesischen Produkts $A \times A$ wird (binäre) Relation in $A$ genannt.
$\emptyset \subseteq A \times B$ wird *leere Relation* und $A \times B$ wird *Allrelation* zwischen $A$ und $B$ genannt. Die Menge $\{(a, a) \mid a \in A\}$ wird die *identische Relation* in $A$ genannt und kurz mit $Id_A$ bezeichnet.

Zur Darstellung von Relationen sind verschiedene Methoden gebräuchlich: Darstellungen in Tabellenform (vgl. relationale Datenbanken) und Graphen.

**Operationen auf Relationen**

a) Sind $R$ und $R'$ Relationen zwischen $A$ und $B$, dann sind auch die Vereinigung $R \cup R'$, der Durchschnitt $R \cap R'$ sowie die Komplemente $\overline{R} = (A \times B) \setminus R$ ($\overline{R'}$ analog) Relationen zwischen $A$ und $B$.
b) Die zu einer Relation $R \subseteq A \times B$ *inverse Relation* $R^{-1} \subseteq B \times A$ ist definiert durch $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$.
c) Die *Verkettung* $R \circ S$ von zwei Relationen $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ ist definiert durch
$\{(a, c) \in A \times C \mid$ es gibt ein $b \in B$ mit $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in S\}$

**Eigenschaften von Relationen in Mengen**
**Definition:** Sei $R$ eine Relation in $A$.
$R$ ist *reflexiv*, falls für jedes $a \in A$ gilt, dass $a\,R\,a$, d.h. $Id_A \subseteq R$.
$R$ ist *symmetrisch*, falls aus $a\,R\,b$ folgt, dass $b\,R\,a$ , d.h. $R^{-1} \subseteq R$.
$R$ ist *transitiv*, falls aus $a\,R\,b$ und $b\,R\,c$ folgt, dass $a\,R\,c$, d.h.
$R \circ R \subseteq R$.
$R$ ist *antisymmetrisch*, falls aus $a\,R\,b$ und $b\,R\,a$ die Gleichheit $a = b$ folgt, d.h. $R \cap R^{-1} \subseteq Id_A$.
$R$ ist *asymmetrisch*, falls aus $a\,R\,b$ folgt, dass $(b, a) \notin R$, d.h.
$R \cap R^{-1} = \emptyset$.

**Äquivalenzrelationen**

**Definition:** Eine Relation in einer Menge $A$ wird *Äquivalenzrelation* genannt, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

**Definition:** Ist $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation und ist $a \in A$, dann nennt man die Menge $\{x \in A \mid xRa\}$ die *Äquivalenzklasse* von $a$ (bezüglich $R$). Sie wird mit $a/_R$ bezeichnet. Ein Element einer Äquivalenzklasse wird auch *Repräsentant* dieser Klasse genannt.

**Lemma:** Sei $R$ eine Äquivalenzrelation, dann sind zwei Äquivalenzklassen $a/_R$ und $b/_R$ entweder gleich oder disjunkt. Sie sind genau dann gleich, wenn $a\,R\,b$ gilt.

**Satz:** Ist $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation, dann bildet die Menge aller Äquivalenzklassen eine Partition von $A$. Umgekehrt, ist eine Partition $\{A_i \mid i \in I\}$ von $A$ gegeben, dann ist die durch "$a\,R\,b$ genau dann, wenn es ein $i \in I$ gibt, so daß $a \in A_i$ und $b \in A_i$" definierte Relation $R$ eine Äquivalenzrelation. □

**Definition:** Sei $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation. Eine Untermenge wird Repräsentantensystem für $R$ genannt, wenn sie aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält.

# 4 Funktionen

**Definition:** Unter einer *Funktion* (oder *Abbildung*) $f$ von einer Menge $A$ in eine Menge $B$ versteht man eine Zuordnung, bei der jedem Element aus $A$ ein eindeutig bestimmtes Element aus $B$ entspricht. Formal kann $f$ als eine Relation zwischen $A$ und $B$ charakterisiert werden, so daß für jedes $a \in A$ genau ein $b \in B$ existiert mit $a\,f\,b$. Als übliche Schreibweise dafür verwenden wir $f : A \longrightarrow B$ und $f(a) = b$.

**Definition:** Ist $f : A \longrightarrow B$ eine Funktion, $M \subseteq A$ und $N \subseteq B$, dann nennt man die Menge

$$f(M) = \{y \in B \mid \text{es gibt ein } x \in M \text{ mit } f(x) = y\}$$

das *Bild* von $M$ unter $f$ und die Menge

$$f^{-1}(N) = \{x \in A \mid f(x) \in N\}$$

das *vollständige Urbild* von $N$ unter $f$.

**Definition:** Eine Funktion $f : A \longrightarrow B$ heißt *surjektiv (auf $B$)*, falls jedes Element von $B$ im Bild von $A$ auftritt, d.h. $f(A) = B$.

Eine Funktion $f : A \longrightarrow B$ heißt *injektiv*, falls je zwei verschiedene Elemente aus $A$ auch verschiedene Bilder haben, d.h., wenn aus $f(a) = f(a')$ folgt: $a = a'$.

Eine Funktion wird *bijektiv* genannt, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

**Beispiel:** Wir betrachten die bekannte Sinusfunktion. Als Funktion von den reellen Zahlen in die reellen Zahlen ist $sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ weder injektiv noch surjektiv. Dagegen ist

$sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ eine surjektive Funktion,

$sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine injektive Funktion und

$sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ eine bijektive Funktion.

Betrachtet man eine Funktion $f : A \longrightarrow B$ als Relation, dann ist die zu $f$ inverse Relation $f^{-1}$ genau dann eine Funktion, wenn $f$ bijektiv ist. In diesem Fall wird $f^{-1}$ die zu $f$ *inverse Funktion* genannt.

**Definition:** Sind $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ Funktionen, dann ist die Relationsverkettung $f \circ g$ eine Funktion von $A$ in $C$. Sie wird *Verknüpfung* von $f$ mit $g$ genannt und durch $gf : A \longrightarrow C$ bezeichnet, wobei $gf(a) = g(f(a))$ gilt. Man beachte, dass Relationsverkettungen von links nach rechts und Funktionsverknüpfungen von rechts nach links geschrieben werden.

**Satz:** Die folgenden Fakten ergeben sich als einfache Schlussfolgerungen aus den Definitionen. Seien $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ zwei Funktionen, dann gilt:
Ist $f$ bijektiv, dann ist $f^{-1}f = Id_A$ und $ff^{-1} = Id_B$
$f$ ist genau dann injektiv, wenn eine Funktion $h : B \longrightarrow A$ existiert mit $hf = Id_A$.
$f$ ist genau dann surjektiv, wenn eine Funktion $h : B \longrightarrow A$ existiert mit $fh = Id_B$.
Sind $f$ und $g$ injektiv, dann ist auch $gf$ injektiv.
Sind $f$ und $g$ surjektiv, dann ist auch $gf$ surjektiv.
Sind $f$ und $g$ bijektiv, dann ist auch $gf$ bijektiv und es gilt $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$. □

# 5 Beweistechniken

In diesem Abschnitt geht es darum, einige grundlegende Beweisstrategien kennenzulernen bzw. zu wiederholen.
Da das prinzipielle Verständnis im Mittelpunkt stehen soll, sind die in den Beispielen bewiesenen Aussagen sehr einfach gewählt. Gerade bei diesen scheinbaren Selbstverständlichkeiten wird ein weiteres Problem deutlich: Bevor man an einen Beweis geht, muss man sich klarmachen, was man schon als Basiswissen voraussetzen kann, und was man noch beweisen muss. Oft ist als erster hilfreicher Schritt eine geeignete Formalisierung der Aussage notwendig.

Zunächst einige *goldene Regeln* für schöne Beweise:

- Erkläre, was Du machen willst! Zum Beispiel: Wir führen eine Beweis mit vollständiger Induktion... Damit ist die prinzipielle Struktur dessen, was folgt, schon klar für den Leser.
- Die verwendeten Argumente sollten linear geordnet sein. Also keine unbewiesenen Fakten benutzen!
- Ein Beweis ist eher ein Essay als reine Rechnung, vermeide auch den exzessiven Gebrauch von Symbolismus.
- Vereinfache die Darstellung so weit wie möglich!
- Wähle sinnvolle Bezeichner! Grundregel: Ähnliche Sachen werden ähnlich bezeichnet! Das sind dann oft im Alphabet nebeneinanderstehende Buchstaben wie

$X, Y, Z$ oder man verwendet Indizes $X_1, X_2, X_3$ oder auch $X', X'', X^*$ usw. Es gibt dann stillschweigende Vereinbarungen wie der Gebrauch von $f, g, h \ldots$ für Funktionen, $n, m, i, j, k \ldots$ für natürliche Zahlen und Indizes.

- Keine unerlaubten Tricks!!! Formulierungen wie "Offensichtlich gilt...", "Es ist klar, dass...","Der Beweis wird dem Leser überlassen..." erwecken nur Zweifel.
- Führe den Beweis zu Ende, was für den Autor klar ist, muss für den Leser noch lange nicht klar sein.

Viele mathematische Sätze haben die Form einer Implikation, sie sagen, dass aus einer bestimmten Voraussetzung $p$ eine Behauptung $q$ folgt.

Zum Beweis kann man verschiedene Techniken anwenden. Basis für die Gültigkeit solcher Beweise sind einige einfache Äquivalenzen und Implikationen, die man leicht mit der Wahrheitstafelmethode nachweisen kann.

Die naheliegendste Technik ist der **direkte Beweis**, der darauf beruht, die Implikation $p \to q$ in mehrere elementare Teilschritte zu zerlegen, wobei man die folgende Tautologie nutzt: $((p \to r) \wedge (r \to q)) \to (p \to q)$. Grundlage dafür ist der *modus ponens*, das ist die Tautologie $(p \wedge (p \to r)) \to r$.
Wie das folgende Beispiel zeigt, bewegt man sich bei der Begründung der Elementarschritte in einem System, das sich auf einigen Axiomen (Grundannahmen) aufbaut und in dem man auf bereits bewiesene Tatsachen zurückgreifen kann.

**Satz:** Ist eine natürliche Zahl $n$ durch 6 teilbar, so ist ihr Quadrat durch 9 teilbar.
Beweis: Die Idee ist offensichtlich – ist $n$ durch 6 teilbar, so kann man den Faktor 6 und damit auch den Faktor 3 von $n$ abspalten. Folglich kann man den Faktor 3 mindestens zwei mal von $n^2$ abspalten. Wenn wir diese Idee etwas formaler umsetzen wollen, müssen wir mit der Definition von Teilbarkeit beginnen:
$n \in \mathbb{N}$ ist durch $k \in \mathbb{N}$ teilbar, falls ein $l \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $n = k \cdot l$.
Damit kann man die Voraussetzung des Satzes durch eine einfache Formel ausdrücken und die folgende Beweiskette bilden:

| | | |
|---|---|---|
| $n$ ist durch 6 teilbar | | Hypothese |
| $\exists l \in \mathbb{N}$ | $n = 6 \cdot l$ | Teilbarkeitsdefinition |
| $\exists l \in \mathbb{N}$ | $n = (3 \cdot 2) \cdot l$ | $6 = 3 \cdot 2$ |
| $\exists l \in \mathbb{N}$ | $n^2 = ((3 \cdot 2) \cdot l)((3 \cdot 2) \cdot l)$ | Quadrieren |
| $\exists l \in \mathbb{N}$ | $n^2 = (3 \cdot 3)((2 \cdot 2) \cdot (l \cdot l))$ | Muliplikation ist assoziativ und kommutativ |
| $\exists l \in \mathbb{N}$ | $n^2 = 9 \cdot (4 \cdot l^2)$ | $3 \cdot 3 = 9$ und $2 \cdot 2 = 4$ |
| $\exists l' \in \mathbb{N}$ | $n^2 = 9 \cdot l'$ | $l' = 4l^2$ |
| $n^2$ ist durch 9 teilbar | | Teilbarkeitsdefinition $\square$ |

Genau betrachtet haben wir beim Schritt von der vierten zur fünften Zeile sogar mehrere Elementarschritte zu einem Schritt zusammengefasst.

Manchmal ist es schwierig, den Beweis direkt zu führen. Als Alternativen bieten sich indirekte Beweise durch **Kontraposition** oder in der Form von **Widerspruchs-Beweisen** an. Beim *Beweis durch Kontraposition* wird anstelle von $p \to q$ die logisch äquivalente Aussage $\neg q \to \neg p$ bewiesen. Beim Widerspruchs-Beweis wird anstelle von $p \to q$ die logisch äquivalente Aussage $(p \wedge \neg q) \to 0$ bewiesen.
Man beachte, dass eine Aussage $p$ äquivalent ist zu $1 \to p$ und damit auch zu $\neg p \to 0$.

**Beispiel:** Wir beweisen durch Kontraposition, die folgende Aussage über ganze Zahlen: *" Ist $a^2$ ungerade, so ist auch $a$ ungerade"*.
Bewis: Da die Negation von *"ungerade sein"* die Eigenschaft *"gerade sein"* ist, lautet die Kontraposition *" Ist $a$ gerade, so ist auch $a^2$ gerade"*. und dafür gibt es einen einfachen direkten Beweis:
Ist $a$ gerade, so gibt es eine ganze Zahl $b$ mit $a = 2b$. Folglich ist $a^2 = (2b)^2 = 2 \cdot (2b^2)$ und somit ist $a^2$ gerade. □

Häufig ist es notwendig, verschiedene Fälle zu analysieren. Das dabei verwendete logische Prinzip ist Äquivalenz der Aussagen $p \to q$ und $(p \wedge r \to q) \wedge (p \wedge \neg r \to q)$ für ein beliegig gewähltes $r$, wir unterscheiden also die Fälle $r$ und $\neg r$. Man kann diese Fallunterscheidung auch noch feiner machen und den Fall $r$ etwa aufspalten in $r \wedge t$ und $r \wedge \neg t$.

**Beispiel:** Wir beweisen durch Fallunterscheidung, dass für jede Primzahl $p \geq 5$ die Zahl $p^2 - 1$ durch 24 teilbar ist.
Beweis: Zuerst formen wir $p^2 - 1$ in $(p+1)(p-1)$ um und beobachten, dass von drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen genau eine durch 3 teilbar ist. Da $p > 3$ und Primzahl ist, muss $p-1$ oder $p+1$ und damit auch $p^2 - 1$ durch 3 teilbar sein. Bleibt zu zeigen, dass $p^2 - 1$ durch 8 teilbar ist. Da $p$ ungerade ist sind sowohl $p-1$ als auch $p+1$ gerade und damit ist $p^2 - 1$ durch 4 teilbar. Den noch fehlenden Faktor 2 kann man durch Fallunterscheidung nachweisen:
1. Fall: Ist $p - 1$ durch 4 teilbar, so ist $p - 1 = 4k$ und $p + 1 = 4k + 2 = 2(2k + 1)$ und damit $p^2 - 1 = 8k(2k + 1)$ für eine natürliche Zahlen $k$.
2. Fall: Ist $p - 1$ nicht durch 4 teilbar, so hat es die Form $4m + 2 = 2(2m + 1)$ für eine natürliche Zahl $m$ und folglich ist $p + 1 = 4m + 4 = 4(m + 1)$. Damit erhalten wir $p^2 - 1 = 8(2m + 1)(m + 1)$. □

### Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Alle aus der Schulmathematik bekannten Aussagen über natürliche Zahlen können aus einigen wenigen Grundannahmen, den Peano'schen Axiomen, abgeleitet werden:

1. Axiom: 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Axiom: Jede natürliche Zahl $n$ hat eine eindeutigen Nachfolger $S(n)$, der auch eine natürliche Zahl ist.
3. Axiom: Aus $S(n) = S(m)$ folgt $n = m$.
4. Axiom: 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
5. Axiom: Jede Menge X, die 0 enthält und für die gilt, dass aus $n \in X$ auch $S(n) \in X$ folgt, enthält alle natürlichen Zahlen.

**Achtung:** Wir schreiben für den Nachfolger $S(n)$ auch $n + 1$, aber das ist als symbolische Schreibweise und nicht als Anwendung der Operation Addition zu verstehen. Im Gegenteil, wie die folgenden Betrachtungen zeigen, kann die Addition durch Anwendung der Nachfolgerfunktion rekursiv definiert werden.

**Konsequenz 1:** Man kann Funktionen $f : \mathbb{N} \to A$ definieren, indem man $f(0)$ festlegt und $f(S(n))$ auf $f(n)$ zurückführt. Dieses Prinzip der Definition von Funktionen nennt man *Rekursion*.

**Beispiel:** Um die Addition von natürlichen Zahlen zu einzuführen, definieren wir für jede fest gewählte Zahl $m$ die Funktion $m+ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die jedem $n$ aus dem Definitionsbereich die Summe $m + n$ zuordnen soll. Diese Funktion hat die folgende rekursive Definition: $m + (0) := m$ und $m + (S(n)) := S(m + n)$. Das entspricht den Regeln $m + 0 := m$ und $m + (n + 1) := (m + n) + 1$.
Analog kann man die Multiplikation durch $m\cdot : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $m \cdot (0) := 0$ und $m \cdot (S(n)) := (m \cdot (n)) + m$ definieren, was den Regeln $m \cdot 0 := 0$ und $m \cdot (n + 1) := (m \cdot n) + m$ entspricht.

**Konsequenz 2:** Man kann allgemeine Aussagen über natürliche Zahlen nach dem folgenden Schema beweisen. Eine Aussageform $P(x)$ über dem Bereich der natürlichen Zahlen ist wahr für alle natürlichen Zahlen, wenn sie die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

1. $P(0)$ ist wahr.
2. Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $P(n)$ wahr, dann ist auch $P(n + 1)$ wahr.

Dieses Beweisprinzip nennt man **vollständige Induktion**.
Die erste Bedingung wird *Induktionsanfang* oder *Induktionsbasis*, die zweite Bedingung *Induktionsschluss* genannt. Dabei heißt $P(n)$ *Induktionsvoraussetzung* oder *Induktionsannahme* und $P(n + 1)$ *Induktionsbehauptung*.
Beweis: Sei $W \subseteq \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, für die $P(n)$ wahr ist. Wegen des Induktionsanfangs ist $0 \in W$. Der Induktionsschritt zeigt, dass falls $n \in W$ gilt, auch $n + 1 \in W$. Nach dem 5. Peanoschen Axiom ist $\mathbb{N} \subseteq W$, also $W = \mathbb{N}$. □

Es folgen Beispiele für Aussagen, die man mit vollständiger Induktion beweisen kann:

**Beispiel 1**: Für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ ist die Summe der ungeraden Zahlen

von 0 bis $2n+1$ gleich $(n+1)^2$. Es gilt also:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$$

Beweis:
Wir führen einen Beweis mit vollständiger Induktion.
Sei $P(n)$ die Aussage $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$.
Induktionsanfang: $P(0)$ gilt, denn $\sum_{i=0}^{0}(2i+1) = 1 = (0+1)^2$
Induktionsschritt: Sei $n$ eine beliebige natürliche Zahl und nehmen wir an, dass $P(n)$ gilt. Wir zeigen, dass auch $P(n+1)$ gilt.
$\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) = \sum_{i=0}^{n}(2i+1) + \ (2(n+1)+1)$
Wir wenden auf den ersten Teil der Summe die Induktionsvoraussetzung an und erhalten durch Vereinfachen: $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) + \ (2(n+1)+1) = (n+1)^2 + 2n + 3 =$
$= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$
Dies zeigt die Richtigkeit von $P(n+1)$ unter der Annahme der Richtigkeit von $P(n)$ und nach dem Prinzip der vollständigen Induktion haben wir die Aussage für jedes $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. □

**Beispiel 2**: Für beliebige reelle Zahlen $a$ und $r \neq 1$ und für jede natürliche Zahl $n$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}$$

Beweis: Übung □

**Zwei Varianten des Induktionsprinzips** werden häufig verwendet:

1. Wird die Induktionsbasis nicht für $n = 0$ sondern für einen anderen festen Anfangswert $k > 0$ bewiesen und zeigt man außerdem $\forall n \geq k: \ P(n) \rightarrow P(n+1)$ , so gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq k$.

2. Beim Induktionsschritt ist es erlaubt, nicht nur auf $P(n)$, sondern auf beliebige kleinere Zahlen zurückzugreifen, d.h. an Stelle von $P(n) \rightarrow P(n+1)$ zeigt man $P(k) \wedge P(k+1) \wedge \ldots \wedge P(n) \rightarrow P(n+1)$, wobei $k$ der Anfangswert aus der Induktionsbasis ist. Dieses Prinzip wird *verallgemeinerte vollständige Induktion* genannt.

**Beispiel 3:** Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ kann man als Produkt von Primzahlen darstellen.
Beweis: Wir führen einen Beweis mittels verallgemeinerter vollständiger Induktion.
Sei $P(n)$ die Aussage, dass sich $n$ als Produkt von Primzahlen schreiben lässt. (Achtung: Das Produkt kann auch nur aus einem Faktor bestehen.)
Induktionsanfang: $P(2)$ gilt, denn $2 = 2$ ist in der geforderten Produktform.
Induktionsschritt: Sei $n$ eine beliebige natürliche Zahl und nehmen wir an, dass

$P(2) \wedge P(3) \wedge \ldots \wedge P(n)$ gilt. Wir zeigen, dass dann die Aussage $P(n+1)$ gilt.
Wir führen eine Fallunterscheidung durch.
Fall 1: $n+1$ ist Primzahl. Dann ist die Zahl selbst die gesuchte Faktorisierung.
Fall 2: $n+1$ ist keine Primzahl. Das heißt:$\exists k, l \in \mathbb{N} : 1 < k, l < n+1 \wedge n+1 = k \cdot l$.
Nach Annahme gibt es für $k$ und für $l$ Primzahlfaktorisierungen:

$$k = p_1 \cdot \ldots \cdot p_{m_k} \quad \text{und} \quad l = q_1 \cdot \ldots \cdot q_{m_l}$$

wobei alle $p_i$ und $q_j$ Primzahlen sind. Das liefert aber sofort eine Faktorisierung für $n+1$:

$$n+1 = k \cdot l = p_1 \cdot \ldots \cdot p_{m_k} \cdot q_1 \cdot \ldots \cdot q_{m_l}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist damit die Aussage für alle natürlichen Zahlen $\geq 2$ bewiesen. □

Manchmal ist es hilfreich, im Induktionsanfang die Aussage für mehrere Werte zu beweisen.

**Beispiel 4:** Jede natürliche Zahl $\geq 12$ lässt sich als Summe schreiben, in der alle Summanden 4 oder 5 sind. Formal:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 12 \exists k, l \in \mathbb{N} : n = k \cdot 4 + l \cdot 5$$

Beweis: Wir führen einen Beweis mittels verallgemeinerter vollständiger Induktion.
Induktionsanfang: Die Aussagen $P(12), P(13), P(14), P(15)$ gelten.
Induktionsschritt: Wir zeigen für ein beliebiges $n+1 \geq 16$, dass die Aussage $P(n+1)$ aus $P(12) \wedge P(13) \wedge \ldots \wedge P(n)$ folgt.
Das ist sofort klar, wenn man sich die Aussage $P(n+1-4)$ anschaut. Denn $n-3 \geq 12$ und damit gilt nach Annahme $n-3 = k \cdot 4 + l \cdot 5$ für irgendwelche $k, l \in \mathbb{N}$. Also ist dann $n+1 = (k+1) \cdot 4 + l \cdot 5$ und nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist damit die Aussage für alle natürlichen Zahlen $\geq 12$ bewiesen. □
Zum Schluss das Beispiel eines falschen(!) Beweises, das illustriert, dass man im Induktionsschritt die Implikation $P(n) \rightarrow P(n+1)$ tatsächlich für alle $n$ zeigen muss.

**Beispiel 5:** In jeder Menge von $n > 0$ Menschen haben alle das gleiche Geschlecht.
Beweis:Wir führen einen Beweis mittels vollständiger Induktion.
Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Aussage tatsächlich richtig!
Induktionsschritt: Nehmen wir an für ein beliebiges $n$ gilt $P(n)$ und betrachten wir eine $(n+1)$–elementige Menschenmenge $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}\}$.
Wir bilden zwei $n$–elementige Menschenmengen $M_1 = \{m_2, m_3, \ldots, m_{n+1}\}$ und $M_2 = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$. Nach Induktionsannahme haben jeweils in $M_1$ und in $M_2$ alle dasselbe Geschlecht. Aber die Menschen in $M_1 \cap M_2$ gehören zu beiden, also haben in der Tat alle $n+1$ Menschen dasselbe Geschlecht!!

**Was ist falsch?:** Man mache sich klar, dass die Argumentation im Induktionsschritt

nicht für $n = 1$ funktioniert, denn dann ist $M_1 \cap M_2$ leer. Für größere $n$ funktioniert es, aber dann findet man keinen passenden Induktionsanker! Also haben nicht in jeder Menschenmenge alle das gleiche Geschlecht...