

Aufgaben, die im ersten Tutorium besprochen werden:**Aufgabe 1:** **vollständige Induktion**

a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $a_n = n^3 + 2n$ durch 3 teilbar ist.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass man jeden Betrag von $n \geq 35$ Cent durch Briefmarken mit den Werten 5 und 9 Cent zusammensetzen kann.

Aufgabe 2: **k -näre Zahldarstellung**

a) Stellen Sie die Zahl 1475 im Binär- und Oktalsystem (d.h. Basis $k = 2$ und $k = 8$) dar, sowie in den Zahlssystemen zur Basis $k = 3$ und $k = 5$.

b) Stellen Sie die Zahlen 19 und 21 im Binärsystem dar, führen Sie die Addition und Multiplikation dieser beiden Zahlen nach dem Schulsystem aus und überprüfen Sie die Korrektheit der Ergebnisse.

c) Führen Sie die Berechnungen aus Teilaufgabe b) noch einmal im System mit der Basis $k = 5$ aus.

Aufgaben zur Abgabe:**Aufgabe 3:** **vollständige Induktion** (8 Punkte)

a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ die folgende Identität gilt:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für jede ungerade Zahl n , die Zahl $n^2 - 1$ durch 8 teilbar ist.

Aufgabe 4: **Rekursion und Induktion** (4 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ wird wie folgt rekursiv definiert:

$$f(0) = 0 \text{ und}$$

$$f(n+1) = n+1 - f(n).$$

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $f(n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ gilt.

Aufgabe 5: **Rekursion und formale Sprachen** (4 + 2 Punkte)

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ ein gegebenes Alphabet. Die formalen Sprachen $L_1 \subseteq \Sigma^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma^*$ sind wie folgt rekursiv definiert:

$$L_1 = \{\varepsilon\} \cup \Sigma \cup 0 \circ L_1 \circ 0 \cup 1 \circ L_1 \circ 1$$

$$L_2 = \{\varepsilon\} \cup 0 \circ L_2 \circ 1 \cup 1 \circ L_2 \circ 0 \cup L_2 \circ L_2$$

a) Geben Sie eine einfache verbale Beschreibung für die Sprachen L_1 und L_2 . Entscheiden Sie, zu welcher(n) Sprache(n) die folgenden Wörter gehören:

$$w = 01001011 \qquad w' = 011010110 \qquad w'' = 101011$$

Begründen Sie positive Antworten durch Angeben eines Schemas mit dem das Wort als Element der Sprache L_i nach den gegebenen Regeln aufgebaut werden kann.

b) Wieviele Wörter der Länge 7 gehören zur Sprache L_1 und wieviele Wörter der Länge 4 gehören zur Sprache L_2 ? Begründen Sie die Antworten kurz!