Zusätzliches 10. Aufgabenblatt vom Freitag, den 15. Dezember 2006 zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker I

(Frank Hoffmann)

Freiwillige Abgabe am Mittwoch, den 10. Januar 2007 bis $13^{\underline{00}}$

Bei den folgenden Aufgaben handelt es sich um Klausuraufgaben vergangener Jahre. Sie sollten pro Aufgabe nicht viel mehr als 20 Minuten benötigen. Versuchen Sie, zunächst ohne Hilfsmittel auszukommen. Markieren Sie(!) vier Aufgaben, die kontrolliert und bewertet werden sollen.

1. **Logisches und Grundsätzliches** (2+2+2 Punkte)

   (a) Untersuchen Sie, ob der `NAND`–Operator assoziativ ist.

   (b) Betrachten Sie die Menge der Booleschen Terme über n Variablen. Wie viele Äquivalenzklassen gibt es bezüglich semantischer Äquivalenz? Begründung!
   2 Zusatzpunkte: Zeigen Sie, dass alle diese Äquivalenzklassen gleichmächtig sind.

   (c) Zeigen Sie, dass der Durchschnitt zweier Äquivalenzrelationen R, R' wiederum eine Äquivalenzrelation ist.

2. **Logisches** (4+2 Punkte)

   (a) Betrachten Sie den Booleschen Ausdruck:

   $$(\neg x \wedge y \vee \neg z) \Rightarrow (x \wedge y)$$

   Geben Sie zunächst die vollständige Klammerung für diesen Ausdruck an. Bilden Sie außerdem die kanonische DNF.

   (b) Ist die Implikation zusammen mit der Negation eine vollständige Basis für Boolesche Ausdrücke? Begründung!

3. **Funktionen** (4+2 Punkte)

   (a) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen.
   Falls f und $g \circ f$ injektiv sind, ist dann g notwendigerweise injektiv?
   Falls f und $g \circ f$ bijektiv sind, ist dann g notwendigerweise bijektiv?

   (b) Beweisen Sie für eine injektive Funktion $f : A \to B$ und beliebige Teilmengen $S, T \subseteq A$:

   $$f(S) \cap f(T) = f(S \cap T)$$

   .

4. **Kombinatorisches I** (2+2+2 Punkte)

   (a) Formulieren Sie das Inklusion–Exklusions–Prinzip für die Größe der Vereinigung dreier endlicher Mengen A, B, C (Formel!) und begründen Sie es kurz verbal (kein formaler Beweis)!

   (b) Beweisen Sie für natürliche Zahlen n die Ungleichung

   $$\binom{2n}{n} \geq 2^n$$

(c) Begründen Sie die folgende Gleichung, indem Sie auf verschiedene Arten abzählen, wie viele Möglichkeiten es gibt, eine Mannschaft zu k Spielern, wobei einer Kapitän ist, aus insgesamt n Spielern auszuwählen.

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

5. **Abzählen und Wahrscheinlichkeit** (2+2+2 Punkte)

   (a) Wie viele Bitstrings gibt es, die man aus acht Nullen und zehn Einsen bilden kann, bei denen auf jede Null eine Eins folgt. Begründung!

   (b) Es werden n unabhängige Bernoulli–Experimente gemacht, jedes hat Erfolgswahrscheinlichkeit p. Was sind die Wahrscheinlichkeiten, dass

   - kein einziger Misserfolg eintritt,
   - mindestens ein Misserfolg eintritt,
   - höchstens zwei Misserfolge zu verzeichnen sind,
   - mindestens zwei Misserfolge auftreten?

   (c) Zeigen Sie:

   $$\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1} = (1/2)\binom{2n+2}{n+1}$$

6. **Wahrscheinliches** (2+2+1+1 Punkte)

   (a) Was ist eine Zufallsvariable und wie ist ihr Erwartungswert definiert?

   (b) Beweisen Sie die sogenannte Bonferroni–Ungleichung, die für beliebige Ereignisse E und F in einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Pr) sagt:

   $$Pr(E \cap F) \geq Pr(E) + Pr(F) - 1$$

   Wie kann F in Abhängigkeit von E gewählt werden, damit Gleichheit garantiert ist? Begründen Sie dies kurz.

   (c) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim 5–maligen Werfen einer fairen Münze 4 Mal Kopf fällt unter der Bedingung, dass Kopf schon beim ersten Mal fällt.

   (d) Ein Bernoulli–Experiment hat eine Erfolgswahrscheinlichkeit von 10%. Wie viele Experimente muss man durchführen, damit man mit Wahrscheinlichkeit von mindestens 80% einmal Erfolg hat? (Herleitung der Formel reicht!)