2. Aufgabenblatt vom Freitag, den 27. Oktober 2006 zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker I

(Frank Hoffmann)

Abgabe am Mittwoch, den 08. November 2006 bis $13^{\underline{00}}$

1. **DNF,KNF** (6 Punkte)
   Finden Sie zu den folgenden Formeln semantisch äquivalente Terme in DNF bzw. KNF.
   (a) $(p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge \neg q \wedge \neg r$
   (b) $\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$
   (c) $\neg r \Rightarrow (((p \vee q) \Rightarrow r) \Rightarrow \neg q)$

2. **Vollständige Signaturen** (6 Punkte)
   (a) Zeigen Sie, dass weder $\{\wedge\}$, $\{\vee\}$ noch $\{\Rightarrow\}$ funktional vollständig sind.
   (b) Zeigen Sie, dass die Implikation $\Rightarrow$ zusammen mit dem Term $false$ funktional vollständig ist!
   (c) (Schwerer! 4 Zusatzpunkte) Zeigen Sie, dass $\{\neg, \Leftrightarrow\}$ keine vollständige Signatur ist.
   Tipps: $\Leftrightarrow$ ist kommutativ und assoziativ, zeigen! Damit dann gleiche Literale "gruppieren" und vereinfachen!

3. **Quantoren I** (4 Punkte)
   Finden Sie für folgende quantifizierte Formeln jeweils ein Universum $\mathcal{U}$ und Prädikate A, B und P, so dass die Formel einmal wahr und einmal falsch ist.
   (a) $\forall x \forall y\ (P(x, y) \Rightarrow P(y, x))$
   (b) $\exists x\ (A(x) \wedge \forall y\ B(x, y))$

4. **Quantoren II** (2 Punkte)
   Schreiben Sie eine quantifizierte Formel, die ausdrückt, dass wenigstens 4 verschiedene Elemente aus einem Grundbereich ein Prädikat $P(x)$ erfüllen.

5. **Quantoren III** (2 Punkte)
   Schreiben Sie die folgenden Formeln in Negationsnormalform, das heißt, die verwendeten Negationen beziehen sich nur auf atomare Teilformeln und es werden außer den Quantoren nur die Junktoren $\neg, \vee, \wedge$ benutzt.
   (a) $\neg\forall x\ \exists y\ (P(x, y) \wedge Q(x, y) \wedge R(x, y))$
   (b) $\neg\forall x\ (\exists y\ (P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)) \wedge \exists z\ R(x, z))$