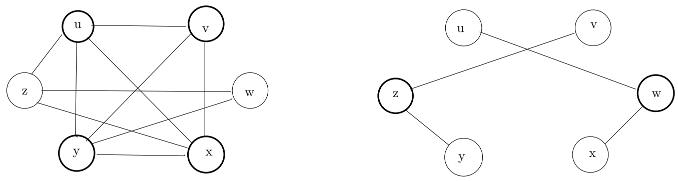

Abbildung 1: Reduktion: CLIQUE zu VERTEX-COVER. links: Clique $V' = \{u, v, x, y\}$. rechts:der Graph $\bar{G}$ mit VC $V \setminus V' = \{w, z\}$

Definition 0.0.1 (Vertex Cover (VC)). Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine Knotenüberdeckung der Grösse k? D.h. $\exists V' \subset V$, $|V'| = k$, $\forall (u, v) \in E$: $u \in V'$ oder $v \in V'$ (oder beides).

Satz 0.0.2. *VC ist NP-vollständig.*

Beweis. 1) Wir zeigen zunächst, dass VC in NP liegt. Gegeben sei hierzu ein Graph $G = (V, E)$ und ein $k \in \mathbb{N}$. Ein Zeuge ist $V' \subset V$. Der Verifikationsalgorithmus bestätigt, ob $|V'| = k$ und überprüft, ob für jeder Kante$(u, v) \in E$ gilt, dass $u \in V'$ oder $v \in V'$. Dies kann offenbar in $\mathcal{O}(|E|)$ durchgeführt werden. 2) Nun zeigen wir, dass VC NP-schwer ist, indem wir CLIQUE darauf reduzieren, d.h. CLIQUE$\leq_p$VC
(Zur Erinnerung: CLIQUE
Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$
Frage: Existiert ein vollständiger Teilgraph (Clique) der Grösse k?)

In der Reduktion konstruieren wir in polynomieller Zeit aus einer Eingabe (G, k) für CLIQUE eine Eingabe (G', k') für VC, sodass gilt: G enthält eine k-Clique $\Leftrightarrow$ G' hat einen VC der Grösse k'. Wir wählen als G' das Komplement $\bar{G}$ von G und $k' = n - k$ mit $n = |V|$. (Erinnerung: $\bar{G} = (V, \bar{E})$ mit $\bar{E} = \{(u, v)|(u, v) \notin E\}$). Dies ist in polynomieller Zeit möglich. Es bleibt nun also noch zu zeigen: G enthält eine k-Clique $\Leftrightarrow$ $\bar{G}$ hat einen VC der Grösse $n-k$. Wir betrachten hierzu $V' \subset V$, eine k-Clique von G. Per Definition heißt das: $\forall u, v \in V' : (u, v) \in E$ und $|V'| = k$. Da $\bar{E}$ das Komplement von E ist, bedeutet dies nichts anderes als: $\forall u, v \in V' : (u, v) \notin \bar{E}$ und $|V'| = k$. Das heißt, entweder u oder v liegen nicht in V', $\forall (u, v) \in \bar{E} : u \in V \setminus V'$ oder $v \in V \setminus V'$ (oder Beides) und $|V \setminus V'| = n-k$. Es wird also jede Kante aus $\bar{E}$ von $V \setminus V'$ bedeckt, was genau der Definition eines VC entspricht: $V \setminus V'$ ist $n - k$-VC in $\bar{G}$.

□

Definition 0.0.3 (SUBSET-SUM). Gegeben: Eine Menge $S = \{a_1, \dots, a_r\} \subset \mathbb{N}$ und eine Zahl $b \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert eine Teilmenge $S' \subset S$ mit $\sum_{a \in S} a = b$?

Satz 0.0.4. *SUBSET-SUM ist NP-vollständig.*

Beweis. 1) Dass SUBSET-SUM $\in$ NP ist, wurde bereits gezeigt. 2) Nun zeigen wir, dass SUBSET-SUM NP-schwer ist, durch VERTEX-COVER$\leq_p$SUBSET-SUM. Die Reduktion funktioniert wie folgt: Wir konstruieren in polynomieller Zeit aus einer Eingabe (G, k) für VC eine Eingabe $a_1, \dots, a_n, b \subset \mathbb{N}$ für

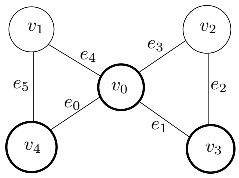

Abbildung 2: Der Graph $Vertex - Cover$ mit Vertex-Cover $\{v_0, v_1, v_2\}$

		e_5	e_4	e_3	e_2	e_1	e_0	
x_0	1	0	1	1	0	1	1	v_0
x_1	1	1	1	0	0	0	0	v_1
x_2	1	0	0	1	1	0	0	v_2
x_3	1	0	0	0	1	1	0	v_3
x_4	1	1	0	0	0	0	1	v_4
y_0	0	1	0	0	0	0	0	
y_1	0	0	1	0	0	0	0	
y_2	0	0	0	1	0	0	0	
y_3	0	0	0	0	1	0	0	
y_4	0	0	0	0	0	1	0	
y_5	0	0	0	0	0	0	1	
b	k	2	2	2	2	2	2	

Tabelle 1: Die fertige Matrix zum Graphen $Vertex - Cover$.

SUBSET-SUM, sodass gilt: G hat einen VC der Grösse $k \Leftrightarrow \exists I \subset \{1, \dots, n\}$ mit $\sum_{i \in I} a_i = b$.

Man betrachte hierzu die Inzidenzmatrix von G: Sei $V = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ und $E = \{e_0, \dots, e_{m-1}\}$, $M = (b_{ij})_{\substack{i=m-1,\dots,0 \\ j=0,\dots,n-1}}$ mit $b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } v_j \in e_i \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

M wird zuerst um eine Einheitsmatrix E_m mit Dimension m nach unten erweitert. Dann wird eine zusätzliche linke Spalte hinzugefügt, deren oberen n Einträge Einsen enthalten und die unteren m Nullen. Zuletzt wird die unterste Zeile angehängt, die k als ersten Eintrag und an den übrigen Stellen Zweien enthält. Alle Zeilen der Matrix werden nun als 4äre Zahlen interpretiert, wobei k beliebige Werte aus $\mathbb{N}$ annehmen darf.

Nun identifizieren wir die SUBSET-SUM Eingabe
$S = \{a_0, \dots, a_r\}$ mit $\{x_0, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_{m-1}\}$, wobei
$x_i = 4^m + \sum_{j=0}^{m-1} b_{ij} * 4^j$
$y_j = 4^j$
und $b = k * 4^m + \sum_{j=0}^{m-1} 2 * 4^j$

Dies ist in polynomieller Zeit möglich.

Wir zeigen nun die Behauptung für die so konstruierte Eingabe:
$\Rightarrow$: Sei $V' \subset V$ mit $V' = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ ein VC von G. Wählt man nun ein $S' \subset S$ mit $S' = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\} \cup \{y_i$ genau ein Knoten e_i ist in $V'\}$, so ist nach

Konstruktion $\sum_{a\in S'} a = b$.

$\Leftarrow$: Sei umgekehrt $S' = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\} \cup \{y_{j_1}, \dots, y_{j_l}\}$ sodass $\sum_{a\in S'} a = b$. Dann ist $V' = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ ein VC von G.

$\square$

Definition 0.0.5 (PARTITION). Gegeben: Eine Menge $R = \{a_1, \dots, a_r\} \subset \mathbb{N}$. Frage: Existiert eine Zerlegung $R = R_1 \dot\cup R_2$ mit $\sum_{a\in R_1} a = \sum_{a\in R_2} a$?

Satz 0.0.6. *PARTITION ist NP-vollständig.*

Beweis. 1) Dass PARTITION $\in$ NP ist, wurde schon gezeigt. 2) Nun zeigen wir noch, dass PARTITION auch NP-schwer ist durch SUBSET-SUM$\leq_p$PARTITION.

Um die Reduktion durchzuführen,konstruieren wir also polynomieller Zeit aus einer Eingabe (S, b) für SUBSET-SUM eine Eingabe R für PARTITION, sodass gilt: $\exists S' \subset S$ mit $\sum_{a\in S'} a = b \Leftrightarrow \exists R = R_1 \dot\cup R_2$ mit $\sum_{a\in R_1} a = \sum_{a\in R_2} a$.

Wir wählen hierzu $R = \{a_0, \dots, a_r, x, y\} = S \cup \{x, y\}$ wobei
$x = 2 * A - b$ und $y = A + b$
$A = \sum_{a\in S'} a$
Dies ist in polynomieller Zeit möglich. Wir beobachten nun Folgendes: x und y können nicht in der gleichen Menge der Zerlegung von R liegen, denn es ist $x + y = 2 * A - b + A - b = 3 * A$, aber $\sum_{a\in R} a = A + x + y = 4 * A$, jede Zerlegungsmenge muss also die Grösse $2 * A$ haben. Demnach müssen R_1 und R_2 folgende Form haben: $R_1 = S' \cup \{x\}$ und $R_2 = S \setminus S' \cup \{y\}$ für ein $S' \subset S$.
Wir zeigen jetzt die Behauptung für die so konstruierte Eingabe:
$\Rightarrow$: Für $S' \subset S$ mit $\sum_{a\in S'} a = b$ wähle $R_1 = S' \cup \{x\}$. Dann ist $\sum_{a\in R_1} a = \sum_{a\in S'} a + 2 * A - b = 2 * A$.
$\Leftarrow$: Aus der Beobachtung folgt, dass R_1 und R_2 von genau dieser Form sein müssen, d.h. S' ist Lösung für SUBSET-SUM.

$\square$

Definition 0.0.7 (3-FÄRBBARKEIT). Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$. Frage: Ist G 3-färbbar?

Definition 0.0.8 (k-Färbung). Sei $G = (V, E)$ ungerichteter Graph. Eine Funktion $c : V \to \{1, \dots, k\}$ heißt k-Färbung von G, wenn gilt: $\forall (u, v) \in E : c(u) \neq c(v)$.

Satz 0.0.9. *3-FÄRBBARKEIT ist NP-vollständig.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass 3-FÄRBBARKEIT in NP liegt. Ein Zeuge ist eine Färbung c mit $|c| \in \mathcal{O}(n)$. Ob c eine gültige Färbung ist lässt sich einfach in $\mathcal{O}(|E|)$ Zeit überprüfen. Nun zeigen wir noch, dass 3-FÄRBBARKEIT NP-schwer ist durch 3-SAT$\leq_p$3-FÄRBBARKEIT. Als Reduktion konstruieren wir in polynomieller Zeit aus einer Eingabe Φ für 3-SAT eine Eingabe $G = (V, E)$ für 3-FÄRBBARKEIT, sodass gilt: G ist 3-färbbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ erfüllende Belegung ϕ vpn Φ. Hierbei ist $\Phi = c_1 \wedge \dots \wedge c_m$ mit Klauseln $c_i = x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee x_{i_3}$ und Literalen $x_{i_j} \in \{v_1, \dots, v_m, \bar{v_1}, \dots, \bar{v_m}\}$. Eine Belegung ϕ ist eine Abbildung $\phi : \{v_1, \dots, v_m\} \to 0, 1$.

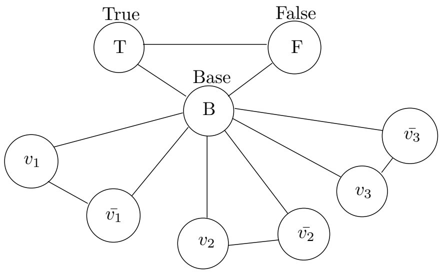

Abbildung 3: 1. Schritt der Reduktion für 3-Färbung

Wir konstruiere nun G in zwei Schritten: 1) Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{v_1, \ldots, v_m, \bar{v_1}, \ldots, \bar{v_m}, T, F, B\}$ Man assoziiert also die Knoten des Graphen mit den Variablen und ihren Negationen. T, F und B sind spezielle Knoten, die mit True, False und Base bezeichnet werden. Zuerst verbinden wir jedes Paar von Knoten v_i und $\bar{v_i}$ mit einer Kante und jeden von ihnen mit Base. Ebenso verbinden wir True, False und Base zu einem Dreieck.

Dieser Graph hat einige hilfreiche Eigenschaften: (i) In jeder 3-Färbung von G müssen v_i und $\bar{v_i}$ verschiedene Farben haben, und beide müssen sich von B unterscheiden. (ii) In jeder 3-Färbung von G müssen die Knoten T,F und B die 3 verschiedenen Farben annehmen, insofern können wir die Farben als True, False und Base-Farbe auffassen. Insbesondere bekommen die Knoten v_i und $\bar{v_i}$ die Farben True oder False. Wir haben jetzt einen Graph G, in dem jede 3-Färbung eine gültige Belegung der Variablen in 3-SAT definiert.

2)Nun müssen wir G so erweitern, dass nur erfüllende Belegungen (d.h. solche die als Antwort true haben) von Φ zu einer 3-Färbung führen. Sei $c_i = x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee x_{i_3}$ eine beliebige Klausel von Φ. c_i ist erfüllt, wenn mindestens eins der Literale mit true belegt ist. (Es muss also gelten: $\neg(\phi(x_{i_1}) = \phi(x_{i_2}) = \phi(x_{i_3}) = false)$ Wir benötigen also einen Teilgraphen, den wir so in G einbauen, dass jede 3-Färbung von G zu einer wahren Belegung von mindestens einem der Knoten $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}$ führt.

Der in Abbildung 4 gezeigte Teilgraph wird in G an den fünf markierten Knoten eingefügt, indem T, F, v_{i_1}, v_{i_2} und v_{i_3} mit denselbigen im schon bestehenden Graphen G identifiziert werden. Dies wird füer alle Klauseln aus Φ durchgeführt. Diesen Graphen nennen wir G'. Dies ist in polynomieller Zeit möglich. Nach obiger Konstruktion gilt also: G' ist 3-färbbar $\Leftrightarrow \exists$ erfüllende Belegung ϕ von Φ.

□

Satz 0.0.10 (VIERFARBEN-THEOREM). *Alle planaren Graphen lassen sich mit 4 Farben färben.*

Bemerkung. Planaren Graphen lassen sich in der Ebene zeichnen, ohne dass sich ihre Kanten kreuzen. Für $k \geq 4$ ist das k-Färbproblem für planare Graphen trivial.

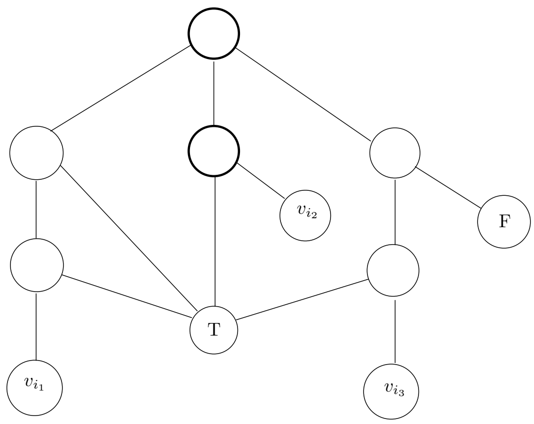

Abbildung 4: 2.Schritt: Dieser Teilgraph wird an den bereits bestehenden Graphen angehanngt. Der obere Knoten kann nicht gefärbt werden, wenn alle 3 Literale False gefärbt werden.