12. Aufgabenblatt vom Freitag, den 20. Januar 2006 zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker I

(Ludmila Scharf, Frank Hoffmann)

Abgabe am Mittwoch, den 01. Februar 2006 bis $13^{\underline{00}}$

1. **Würfelgraphen** (2+1+2 Punkte)

   (a) Kann man auf den 12 Kanten des 3–dimensionalen Würfels Gewichte von 1 bis 12 so verteilen, dass für jeden Knoten die Summe der Gewichte der inzidenten Kanten gleich ist? (Jedes der 12 Gewichte wird genau einmal benutzt!)

   (b) Listen Sie alle paarweise nichtisomorphen durch höchstens 4 Knoten induzierte Untergraphen des Q_3 auf.

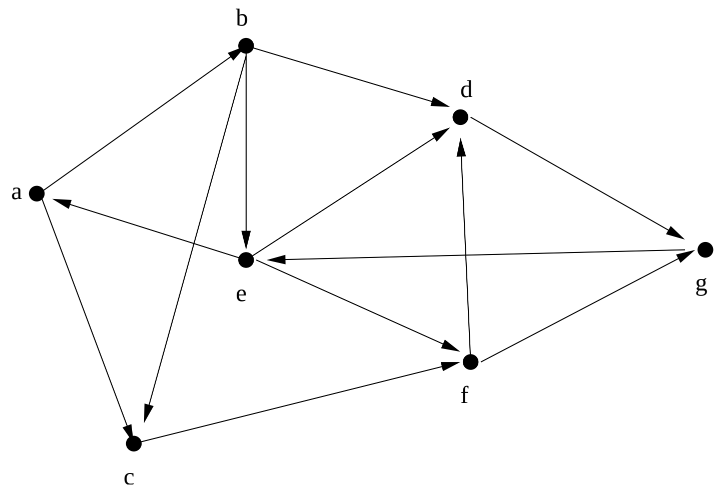
   (c) Beweisen Sie, dass alle Würfelgraphen $Q_n, n > 1$ einen Hamiltonschen Kreis besitzen.
   Zur Erinnerung: Ein Hamiltonkreis ist ein Untergraph, der ein Kreis ist und alle Knoten des Graphen enthält.

2. **Lange Kreise** (4 Punkte)
   Beweisen Sie folgende Aussage:
   Sei G ein ungerichteter Graph auf einer endlichen Knotenmenge ohne Doppelkanten und Schleifen. Der Grad eines jeden Knotens sei mindestens d, d eine feste Zahl ≥ 2. Dann hat G einen Kreis der Länge $> d$.

   Tipp: Gehen Sie im Beweis konstruktiv und zwar 'greedy' vor. Wichtig ist, dass der Graph endlich ist.

3. **Graphdurchmustern** (2+2 Punkte)

   (a) Berechnen Sie für den unten dargestellten Graphen DFS– und BFS–Baum. Illustrieren Sie insbesondere, wie sich die verwendeten Datenstrukturen während des Algorithmus ändern. Der Graph sei in Adjazenzlistenform gegeben und die einzelnen Listen alphabetisch sortiert.



(b) Geben Sie einen konkreten Graphen an, so dass zwei verschiedene Adjazenzlistendarstellungen (d.h. verschieden bzgl. der Reihenfolge in den Listen) zu nichtisomorphen DFS–Bäumen führt. Zeigen Sie das analoge Ergebnis für BFS–Bäume.

4. **Random Walks II** (4 Punkte)
Alice und n Studenten $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sitzen in dieser zyklischen Ordnung an einem runden Tisch. Alice hat eine Flasche Wasser (oder ein anderer Inhalt, spielt keine Rolle) mitgebracht. Diese wird jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0.5 an den linken bzw. rechten Nachbarn weitergegeben, wobei Alice anfängt. Es gewinnt derjenige Student S_k, der die Flasche als letzter bekommt? Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p_k, dass S_k gewinnt? Tipps: Auch hier ist Intuition ein schlechter Ratgeber. Benutzen Sie wieder die Formel über die totale Wahrscheinlichkeit. Zunächst, was ist p_n? Das heißt doch, die Flasche ist irgendwann bei S_{n-1} angelangt und das ist eine Situation, die wir schon vom letzten Übungszettel kennen!