11. Aufgabenblatt vom Freitag, den 13. Januar 2006 zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker I

(Ludmila Scharf, Frank Hoffmann)

Abgabe am Mittwoch, den 25. Januar 2006 bis $13^{\underline{00}}$

1. **Wahrscheinlichkeit I** (3 Punkte) Es werden $n > 1$ ganze Zahlen unabhängig und gleichverteilt aus dem Intervall $[1, 9]$ gewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Produkt der Zahlen durch 10 teilbar ist. Tipp: Was ist notwendige und hinreichende Bedingung für die Teilbarkeit? Berechnen Sie dann die komplementäre Wahrscheinlichkeit.

2. **Wahrscheinlichkeiten II** (6 Punkte)

   Wir betrachten den durch zwei unabhängige und gleichverteilte Würfel erzeugten diskreten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p), d.h. jedes $(i, j) \in \Omega = \{1, 2, \ldots, 6\} \times \{1, 2, \ldots, 6\}$ hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$. Wir definieren die ZufallsvariablenX, Y, Z wie folgt: $X(i, j) \ = \ 6i + j$
   $Y(i, j) \ = \ i \cdot j$
   $Z(i, j) \ = \ 6 \cdot max(i, j) + min(i, j)$
   Beschreiben Sie die diskreten Verteilungsfunktionen der drei Variablen und bestimmen Sie die Erwartungswerte und Varianzen.

3. **(Explizite) Wahrscheinlichkeiten III** (6 Punkte)

   (a) Die UNI stellt 10 Studenten 6 PC's zur Verfügung. Jeder Student hat (unabhängig voneinander) zu 20 Prozent Lust, am PC zu arbeiten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zu einem Zeitpunkt die vorhandenen Rechner nicht ausreichen.

   (b) Wenden Sie die Ungleichungen von Markov und von Tschebyschev auf die vorherige Teilaufgabe an!

   (c) Ein Bernoulli–Experiment hat Erfolgswahrscheinlichkeit 0.01. Wie viele Experimente muss man durchführen, damit man mit Wahrscheinlichkeit mindestens 0.5 wenigstens einmal Erfolg hat?

4. **Wahrscheinlichkeiten IV** (4 Punkte) Beweisen Sie, dass die geometrische Verteilung bei Erfolg p und Misserfolg $q = 1 - p$ die Varianz qp^{-2} hat.

5. **Random Walks I** (3 Punkte) Alice und Bob stehen in einer Reihe. Zwischen ihnen stehen die Studenten $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Also das Gesamtbild ist

   $$A, S_1, S_2, \ldots, S_k, B$$

   S_1 hat eine Flasche Wasser (oder ein anderer Inhalt, spielt keine Rolle) mitgebracht. Diese wird jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0.5 an den linken bzw. rechten Nachbarn weitergegeben bei Start in S_1. Was ist die Wahrscheinlichkeit p_k, dass Alice die Flasche vor Bob erhält? Tipps: Benutzen Sie die Formel über die totale Wahrscheinlichkeit.

Benutzen Sie Rekursion! Wenn die Flasche S_2 erreicht, mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht sie S_1 vor B und was passiert danach?
Die Aufgabe wird auf dem nächsten Zettel weitergeführt.