7. Aufgabenblatt vom Freitag, den 02. Dezember 2005 zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker I

(Ludmila Scharf, Frank Hoffmann)

Abgabe am Mittwoch, den 14. Dezember 2005 bis $13^{\underline{00}}$

1. **Strukturelle Induktion** (3 Punkte) Beweisen Sie mit struktureller Induktion (das entspricht der vollständigen Induktion über den Formelrang), dass jede Boolesche Formel semantisch äquivalent ist zu einer Formel in konjunktiver Normalform.

2. **Binomialkoeefizienten** (4 Punkte)

   (a) Beweisen Sie die Identität $\binom{n}{r} \cdot \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{r-k}$ durch Konstruktion einer geeigneten Bijektion für nichtnegative ganze Zahlen $k \leq r \leq n$.

   (b) Beweisen Sie $\binom{n}{k} = \sum_{m=k-1}^{n-1} \binom{m}{k-1}$ für $1 \leq k \leq n$ mit Induktion über $d := n - k$

3. **Abzählen** (4 Punkte) Begründungen nicht vergessen!

   (a) Wie viele verschiedene Sitzordnungen von 7 Personen an einem runden Tisch mit 7 Stühlen gibt es? Dabei sind zwei Platzierungen verschieden, wenn sich für jemanden der linke oder rechte Nachbar geändert hat.

   (b) In einem Gremium sitzen 16 Frauen und 10 Männer. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, daraus einen 7–köpfigen Ausschuss zu wählen, in dem mehr Frauen als Männer sitzen?

4. **Weihnachtslotterie** (7 Punkte) Der Jahreszeit entsprechend geht es um eine Weihnachtslotterie mit 100 Losen durchnummeriert von 1 bis 100, die in Windeseile an 100 verschiedene Leute verkauft werden. Es gibt 4 Gewinne, einen Hauptgewinn, einen 2. Preis, einen 3. Preis und einen 4. Preis.

   (a) Wie viele verschiedene Preisverteilungen gibt es?

   (b) Wie viele verschiedene Preisverteilungen gibt es, wenn die Person mit Los 13 den Hauptgewinn erhält?

   (c) Wie viele verschiedene Preisverteilungen gibt es, wenn die Person mit Los 13 einen der 4 Gewinne erhält?

   (d) Wie viele verschiedene Preisverteilungen gibt es, wenn die Person mit Los 13 keinen der 4 Gewinne erhält?

   (e) Wie viele verschiedene Preisverteilungen gibt es, wenn die Personen mit Los 7 bzw. 13 jede einen der 4 Gewinne erhält?

   (f) Wie viele verschiedene Preisverteilungen gibt es, wenn der Hauptpreis an eine der Personen mit Los 1, 3, 7 bzw. 13 geht?

   (g) Wie viele verschiedene Preisverteilungen gibt es, wenn die Personen mit den Losen 7 und 13 je einen der 4 Gewinne erhält, aber die mit den Losen 1 und 3 je keinen Gewinn erhalten.