6. Aufgabenblatt vom Freitag, den 25. November 2005 zur Vorlesung

# Mathematik für Informatiker I

(Ludmila Scharf, Frank Hoffmann)

Abgabe am Mittwoch, den 7. Dezember 2005 bis $13^{\underline{00}}$

1. **Lucas–Zahlen** (4 Punkte) Die Folge der Lucas–Zahlen sind definiert durch $l_0 = 2, l_1 = 1$ und $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$ für $n \geq 2$.

   (a) Zeigen, Sie $f_n + f_{n+2} = l_{n+1}$, wobei $f_n$ die $n$–te Fibonacci–Zahl ist.

   (b) Beweisen Sie $l_0^2 + l_1^2 + \ldots + l_n^2 = l_n \cdot l_{n+1} + 2$

2. **Zerlegung von Gittern** (4 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie, dass sich jeweils alle Gitter der folgenden Art in L–förmige Puzzleteile (Größe 3) zerlegen lassen.

   (a) $3 \times 2^n$

   (b) $6 \times 2^n$

   (c) $3^n \times 3^n$

   (d) $6^n \times 6^n$

3. **Beweis durch Kontraposition** (2 Punkte)

   Beweisen Sie die folgende Aussage durch Kontraposition:

   Sei (mindestens) eine von zwei ganzen Zahlen $n$ und $m$ nicht durch 3 teilbar, dann ist auch die Summe oder die Differenz von $n$ und $m$ nicht durch 3 teilbar.

4. **Inklusion–Exklusion** (6 Punkte)

   Eine interessante Anwendung des Prinzips der Inklusion-Exklusion besteht in der Abzählung der Primzahlen in einem Anfangsintervall der natürlichen Zahlen (Achtung: 1 ist keine Primzahl !). Die Grundidee wird durch die Beantwortung der folgenden Fragen deutlich:

   (a) Es sei $M = \{2, 3, 4, \ldots, 100\}$. Wieviele Zahlen aus $M$ sind durch 3 teilbar und wieviele Zahlen aus $M$ sind durch $k$ teilbar für eine beliebige natürliche Zahl aus $k \geq 2$?

   (b) Seien $k$ und $l$ zwei teilerfremde Zahlen aus $\boldsymbol{N}^+$. Wieviele Zahlen aus $M$ sind sowohl durch $k$ als auch durch $l$ teilbar?

   (c) Seien $A$ bzw. $B$, $C$, $D$ die Teilmengen von $M$ der durch 2 bzw. 3, 5, 7 teilbaren Zahlen. Begründen Sie, daß die Anzahl der Primzahlen $|P|$ in $M$ sich durch die folgende Formel bestimmen läßt: $|P| = |M| - |A \cup B \cup C \cup D| + 4$

   (d) Bestimmen Sie diese Anzahl durch das Prinzip der Inklusion-Exklusion.

   (e) Für die Vereinigung wievieler Mengen müsste man dieses Prinzip anwenden, um die Anzahl der Primzahlen aus $\{2, 3, \ldots, 10\,000\}$ zu bestimmen?