5. Aufgabenblatt vom Freitag, den 18. November 2005 zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker I

(Ludmila Scharf, Frank Hoffmann)

Abgabe am Mittwoch, den 30. November 2005 bis $13^{\underline{00}}$

1. **Vollständige Induktion** (12 Punkte)

   Beweisen Sie durch vollständige Induktion folgende Aussagen:

   (a) $n \in \mathbb{N}$ ungerade $\Rightarrow 8 \mid n^2 - 1$

   (b) $1 + \frac{n}{2} \leq H_{2^n} \leq 1 + n$,
   H_k bezeichnet die k-te harmonische Zahl, die wie folgt definiert ist:
   $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$.

   (c) Für Mengen $A_1, \ldots, A_n \subset U$ gilt

   $$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}.$$

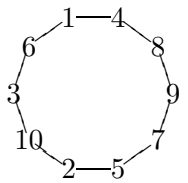
   (d) Zeige, dass n Geraden die Ebene in höchstens $\frac{n^2+n+2}{2}$ Regionen unterteilen.

   (e) Was ist falsch?
   Zeigen Sie: $\forall n \geq 0$ und $a \in \mathbb{R} : a^n = 1$.
   Beweis: I.A.: $a^0 = 1$. $\surd$
   I.S.: Annahme: $a^k = 1$ für alle $k \leq n$, dann $a^{n+1} = \frac{a^n \cdot a^n}{a^{n-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$. $\surd$

   (f) Eine Menge mit n Elementen hat $n(n-1)(n-2)/6$ 3-elementige Teilmengen.

2. (4 Punkte)

   Die Zahlen 1 bis 10 sind in beliebiger Reihenfolge zyklisch angeordnet, z.B. wie auf dem Bild unten. Beweisen Sie, dass es 3 nebeneinander stehende Zahlen mit Summe mindestens 17 gibt.



   Verallgemeinern Sie die Aussage auf Zahlen 1 bis n und $k < n$ nebeneinander stehenden Zahlen. Geben Sie die entsprechende Formel an und begründen Sie diese.

   Tipp: Taubenschlagprinzip.

3. (4 Punkte)

   Beweisen Sie mit einem direkten Beweis, mit Kontraposition, mit Widerspruchsbeweis und mit vollständiger Induktion, dass

   $$\forall n \in \mathbb{N} : n \text{ ist ungerade } \Rightarrow n^2 \text{ ist ungerade.}$$