4. Aufgabenblatt vom Freitag, den 11. November 2005 zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker I

(Ludmila Scharf, Frank Hoffmann)

Abgabe am Mittwoch, den 23. November 2005 bis $13^{\underline{00}}$

1. **Eigenschaften von Relationen** (2 Punkte)

   Welche der folgenden Relationen in der Menge Σ^+ der nichtleeren Wörter über einem endlichen Alphabet Σ sind reflexiv, irreflexiv,symmetrisch,antisymmetrisch und/oder transitiv?

   (a) $R_1 = \{(v, w) \mid v, w \text{ haben keinen gemeinsamen Buchstaben}\}$
   (b) $R_2 = \{(v, w) \mid |v| < |w|\}$

2. **Symmetrischer Abschluss** (2 Punkte)

   Beweisen Sie, dass der symmetrische Abschluss der Vereinigung zweier Relationen gleich der Vereinigung der symmetrischen Abschlüsse ist.

3. **Relationen und Funktionen** (4 Punkte)

   In der folgenden Tabelle sind 15 Relationen $R \subseteq A \times A$ dargestellt, die sich durch Kombination von 5 definierenden Aussageformen und 3 Zahlbereichen für A ergeben ($\boldsymbol{N}$ – die natürlichen Zahlen mit 0, $\boldsymbol{Q}$ – die rationalen Zahlen und $\boldsymbol{R}^+$ – die positiven reellen Zahlen ohne Null). Man untersuche welche dieser Relationen Funktionen sind und wenn ja, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Dazu können folgende Symbole benutzt werden:

   b falls die Relation eine bijektive Funktion von A auf A ist
   i falls die Relation eine injektive Funktion von A in A, aber nicht bijektiv ist
   s falls die Relation eine surjektive Funktion von A auf A, aber nicht bijektiv ist
   f falls die Relation eine Funktion von A in A, aber weder injektiv noch surjektiv ist
   $\times$ falls die Relation keine Funktion von A in A ist

definierende Aussageform	$A = \boldsymbol{N}$	$A = \boldsymbol{Q}$	$A = \boldsymbol{R}^+$
$\{(x, y) \in A \times A \mid \frac{y}{x+1} = 3\}$			
$\{(x, y) \in A \times A \mid \frac{x}{y+1} = 3\}$			
$\{(x, y) \in A \times A \mid x^2 - y - 2 = 0\}$			
$\{(x, y) \in A \times A \mid x - y^2 + 2 = 0\}$			
$\{(x, y) \in A \times A \mid x^2 - y^2 = 0\}$			

4. **Injektive Funktionen I** (3 Punkte) Es sei $f : A \to B$ eine Abbildung mit der folgenden Eigenschaft: Für beliebige $S, T \subset A$ gilt $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$. Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

5. **Injektive Funktionen II** (3 Punkte)

   Beweisen Sie den folgenden Satz: Eine Abbildung $f\colon A \to B$ ist genau dann injektiv, wenn eine Funktion $h\colon B \to A$ existiert, für die $hf = \mathsf{id}_\mathsf{A}$ gilt.

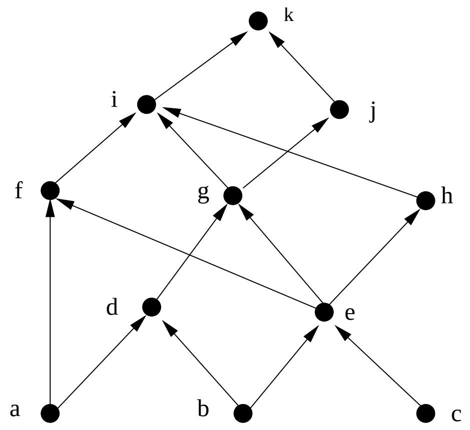
6. **Posets** (3 Punkte)

   Definition: Sei M eine Teilmenge eines Posets $(A, \leq)$ und $b \in A$.

   - b ist obere bzw. untere Schranke von M, falls $b \geq a$ bzw $b \leq a$ für alle $a \in M$.
   - b ist Maximum bzw. Minimum von M, falls $b \in M$ und b obere bzw. untere Schranke von M ist.
   - b ist Supremum bzw. Infimum von M, falls b kleinste obere Schranke bzw. größte untere Schranke von M ist.

   Bestimmen Sie die folgenden Maxima, Minima, Suprema und Infima, falls sie existieren.

Hasse-Diagramm:



min({b,f,h,i})

max({a,b,h,i})

sup({a,c,e,f})

inf({f,h,j})

inf({d,e,f,i})