2. Aufgabenblatt vom Freitag, den 28. Oktober 2005 zur Vorlesung

# Mathematik für Informatiker I

(Ludmila Scharf, Frank Hoffmann)

Abgabe am Mittwoch, den 09. November 2005 bis $13^{\underline{00}}$

1. **Paritätsfunktion** (2+2+2 Punkte) Die Paritätsfunktion $Par_n$ liefert das Ergebnis 0, wenn eine gerade Anzahl von Einsen im Eingabetupel der Länge $n$ sind. Die zweistellige Paritätsfunktion ist das XOR, also die Antivalenz $\oplus$.
   (a) Wie groß sind die Urbilder der 0 bzw. der 1 und warum?
   (b) Geben Sie die kanonische dnf der 4-stelligen Paritätsfunktion an.
   (c) Definieren Sie einen Booleschen Term $t_n$, der die $n$–stellige Paritätsfunktion realisiert, rekursiv mit Hilfe des Terms $t_{n-1}$ für die $(n-1)$–stellige Paritätsfunktion.

2. **Vollständige Menge von Operatoren II** (3 Punkte). Beweisen Sie, dass $\{\oplus\}$ nicht vollständig ist.

3. **dnf und knf** (4 Punkte)

   Stellen Sie für die 3–stellige Majoritätsfunktion ( wird zu 1 ausgewertet, wenn mindestens die Hälfte der Eingänge 1 sind ) sowohl die kanonische dnf und die kanonische knf auf und weisen Sie deren Äquivalenz durch Anwendung von Booleschen Gesetzen nach und drücken Sie diese Formel semantisch äquivalent nur mit NOR–Gattern aus.

4. **Quantoren** (3+2 Punkte)
   (a) Es sei $P(x, y)$ die Aussageform "$x^3 \leq y$" und $Q(x, y)$ die Aussageform "$x^3 \geq y^2$" wobei beide Variablen aus dem Bereich der **rationalen Zahlen** zu wählen sind. Welche logischen Werte nehmen die folgenden Aussagen an?
   a) $\forall x \; \exists y \; P(x, y)$
   b) $\forall y \; \exists x \; Q(x, y)$
   c) $\forall x \; \exists y \; Q(x, y)$
   d) $\exists x \; \exists y \, (P(x, y) \wedge Q(x, y))$
   (b) Der Quantor $\exists!$ steht für "Es gibt genau ein...". Was ist der Wahrheitswert der folgenden Aussagen:

$$\forall x P(x) \Rightarrow \exists! x P(x) \qquad \exists! x \neg P(x) \Rightarrow \neg \forall x P(x)$$