1. Aufgabenblatt vom Freitag, den 21. Oktober 2005 zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker I

(Ludmila Scharf, Frank Hoffmann)

Abgabe am Mittwoch, den 02. November 2005 bis $13^{\underline{00}}$

1. **Tautologien, Semantische Äquivalenz** (2+4 Punkte)

   (a) Bestimmen Sie, ob die folgenden Booleschen Terme Tautologien sind.

   $$(\neg p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg q$$

   $$(\neg q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p$$

   (b) Vereinfachen Sie die folgenden Formeln so weit wie möglich durch Anwendung (und Benennung) der semantischen Äquivalenzen (Booleschen Gesetze)
   Die Formeln: (1) $(\neg q \vee r) \wedge \neg(q \vee p) \wedge \neg q$
   (2) $(p \Rightarrow q \wedge r) \wedge (q \Rightarrow p \wedge r) \wedge (r \Rightarrow p \wedge q)$

2. **Erfüllbarkeit** (2+2 Punkte)

   (a) Gibt es für die folgende unendliche Menge von Booleschen Termen eine Belegung der Variablen derart, dass alle Terme erfüllt werden? Begründen Sie die Antwort.

   $$M = \{x_1 \vee x_2, \neg x_2 \vee \neg x_3, x_3 \vee x_4, \neg x_4 \vee \neg x_5, \ldots\}$$

   (b) Geben Sie 3 Boolesche Terme in den Variablen x, y, z an, von denen je zwei gleichzeitig erfüllt werden können, aber nicht alle 3 gleichzeitig. In jedem der Terme sollen alle 3 Variablen vorkommen.

3. **Vollständige Basen** (2+2 Punkte).

   Eine Menge von Booleschen Operatoren heißt *vollständige Basis*, wenn es zu jedem Booleschen Term einen semantisch äquivalenten gibt, der nur diese Operatoren benutzt.

   (a) Zeigen Sie, dass sowohl $\{NOR\}$ als auch $\{\neg, \Rightarrow\}$ vollständig sind.

   (b) Beweisen Sie, dass $\{\Leftrightarrow\}$ nicht vollständig ist.

4. **Boolesche Funktionen** (4 Punkte).

   Geben Sie mittels Fallunterscheidung einen auch formal exakten Beweis für die folgende Tatsache.
   Sei f eine beliebige n–stellige Boolesche Funktion. Dann gilt für jede Variable x_i mit $1 \leq i \leq n$:

   $$f(x_1, \ldots, x_n) = x_i \wedge f(x_1, \ldots x_{i-1}, 1, \ldots, x_n) \vee \neg x_i \wedge f(x_1, \ldots x_{i-1}, 0, \ldots, x_n)$$