Aufgaben der 1. Klausur zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker I

(Dr. Frank Hoffmann)

Wintersemester 2003/2004 **9. Dezember 2003**

Sie sollten in der Lage sein die Aufgaben der 1. Klausur vom WS03/04 innerhalb 90 Minuten zu lösen.

Aufgabe 1 Logisches $\boxed{\quad /4+2}$

(a) Betrachten Sie den Booleschen Ausdruck:

$$(x \wedge \neg y \vee \neg z) \Rightarrow (x \wedge y)$$

Geben Sie zunächst die vollständige Klammerung für diesen Ausdruck an. Bilden Sie dazu die kanonische DNF.

(b) Bilden Negation und Implikation zusammen eine vollständige Basis für Boolesche Ausdrücke? Begründung!

Aufgabe 2 Äquivalenzrelationen $\boxed{\quad /1+1+2+2}$

(a) Was ist eine Äquivalenzrelation?

(b) Ist das Komplement einer Äquivalenzrelation in einer nichtleeren Menge wieder eine Äquivalenzrelation? Kurze Begründung!

(c) Wie Sie wissen, ist Semantische Äquivalenz eine Äquivalenzrelation in der Menge der Booleschen Ausdrücke. Beweisen Sie, dass die zugehörigen Äquivalenzklassen alle unendliche Kardinalität haben.

(d) Wie viele Äquivalenzrelationen in der Menge $\{a, b, c, d\}$ enthalten die Paare (a, b) und (b, c)? Begründen Sie die Antwort.

Aufgabe 3 Vollständige Induktion, Beweise $\boxed{\quad /4+2}$

(a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass es in einer Menge von $n > 1$ Elementen $n(n-1)/2$ verschiedene zweielementige Untermengen gibt.

(b) Um eine Implikation $P \Rightarrow Q$ zu beweisen, kann man einen Kontrapositionsbeweis oder auch einen Beweis durch Widerspruch führen. Welche logischen Tautologien verwendet man in den beiden Fällen?

Aufgabe 4 Funktionen $\boxed{\quad /4+2}$

(a) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen.
Falls f und $g \circ f$ injektiv sind, ist dann g notwendigerweise injektiv?
Falls f und $g \circ f$ bijektiv sind, ist dann g notwendigerweise bijektiv?

(b) Beweisen Sie für eine injektive Funktion $f : A \to B$ und beliebige Teilmengen $S, T \subseteq A$:

$$f(S) \cap f(T) = f(S \cap T) \ .$$