2. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Höhere Algorithmik II SoSe 2017

Wolfgang Mulzer, Katharina Klost

Abgabe bis zum 02. Mai 2017, 12 Uhr, in den Briefkasten neben Raum 111

Aufgabe 1 Quadratisches Programmieren *10 Punkte*

Angenommen, wir lassen in den Nebenbedingungen eines linearen Programms auch Summanden der Form $d_{ij}x_j^2$ zu, mit $d_{ij} \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das resultierende algorithmische Problem NP-schwer ist.

Aufgabe 2 Varianten von LPs *10 Punkte*

In der Vorlesung haben wir lineare Programme als Optimierungsprobleme der Form

$$\begin{aligned} \max c^T x, &\text{ wobei} \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

definiert. Zeigen Sie für jede der folgenden Varianten und Verallgemeinerungen, dass sie sich auf ein LP obigen Form zurückführen lässt:

(a) die Zielfunktion hat die Form $\min c^T x$,

(b) es gibt eine Nebenbedingung der Form $a_i x \geq b$,

(c) es gibt eine Nebenbedingung der Form $a_i x = b$,

(d) die Variable x_i kann positiv oder negativ sein,

(e) es gibt eine Nebenbedingung der Form $x_i \geq |x_j|$.

Aufgabe 3 Dualität von LPs *10 Punkte*

Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Eine *Paarung* ist eine Menge $M \subseteq E$ von Kanten, so dass jeder Knoten von G höchstens eine inzidente Kante in M hat. Eine *Maximum-Paarung* ist eine Paarung mit der größtmöglichen Anzahl von Kanten.

(a) Zeichnen Sie einen bipartiten Graphen mit 10 Knoten, der eine Maximum-Paarung mit 5 Kanten enthält. Ihr Graph soll auch eine *maximale* Paarung mit 4 Kanten enthalten, die keine Maximum-Paarung ist. (Eine Paarung M heißt *maximal*, falls es keine Paarung M' mit $M' \supset M$ und $M' \neq M$ gibt).

(b) Formulieren Sie das Problem, zu einem gegebenen bipartiten Graphen G eine Maximum-Paarung zu finden, als lineares Programm. Erklären Sie Ihr lineares Programm kurz in Worten.

(c) Formulieren Sie das duale lineare Programm zu Ihrem linearen Programm aus (b). Interpretieren Sie das Ergebnis.

(d) Informieren Sie sich über den *Satz von König*. Folgt der Satz schon aus (b) und (c)? Begründen Sie Ihre Antwort.