Mathematik für Informatiker II — SS 2013

Zusatzaufgaben

Die nachfolgenden Aufgaben dienen zur Vorbereitung auf die Nachklausur am 8.10.2013. Die Schwerpunkte sind ausgerichtet einerseits auf Aufgabentypen mit einem höheren Modellierungsanteil (diese sind der ersten Klausur besonders schlecht ausgefallen) sowie andererseits auf Inhalte aus den letzten Vorlesungen, die bisher noch nicht durch Übungsaufgaben abgedeckt waren (Anwendugen von bestimmten Intergralen und Potenzreihen).
Die Lösungen dieser Aufgaben werden in einem Zusatztutorium, voraussichtlich am 2.10. von 10 bis 12 Uhr besprochen.

Aufgabe 1 — Konvergenz

Beweisen Sie die folgende Aussage anhand der entsprechenden Definitionen:
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ dann divergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bestimmt gegen ∞.

Aufgabe 2 — Extremwerte

Zwei geradlinige Wege treffen sich in einem spitzen Winkel von 30°. Zum Zeitpunkt $t = 0$ startet ein Punkt P_1 von der Kreuzung auf dem ersten Weg mit der gleichmäßigen Geschwindigkeit $v_1 = \sqrt{3}\frac{m}{s}$, 3 Sekunden später startet ein zweiter Punkt P_2 von der Kreuzung auf dem zweiten Weg mit der gleichmäßigen Geschwindigkeit $v_1 = 4\frac{m}{s}$. Zu welchem Zeitpunkt t ist der Abstand zwischen den zwei Punkten (in der Ebene) am kleinsten.
Hinweise:
i) Fertigen Sie eine Skizze an, in der die Kreuzung im Koordinatenursprung liegt und der erste Weg entlang der positiven x-Achse verläuft. Welche Koordinaten haben die Punkte P_1 und P_2 zu einem Zeitpunkt $t \geq 3$.
ii) Der Abstand kann mit dem Satz des Pythagoras bestimmt werden. Da der Abstand genau dann minimal ist, wenn das Quadrat der Abstände minimal ist, reicht es aus, den quadratischen Abstand zwischen P_1 und P_2 zu einem Zeitpunkt $t \geq 3$ als Funktion $q(t)$ zu beschreiben.

Aufgabe 3 — Extremwerte und bestimmtes Integral

Für ein beliebiges $t \in \mathbb{R}$ sei f_t die auf das Intervall $[-2, 4]$ eingeschränkte, quadratische Funktion $f_t(x) = x^2 - t$ und $A(t)$ die Fläche, die vom Graphen der Funktion dem Abschnitt $[-2, 4]$ auf der x-Achse eingeschlossen wird. Bestimmen Sie den Wert von t_0 aus dem Intervall $[0, 4]$, für den die Funktion $A(t)$ ihren minimalen Wert annimmt. Achten Sie darauf, dass die Minimalität von $A(t)$ an der Stelle t_0 wirklich nachgewiesen wird.

Aufgabe 4 **Partielle Integration**

Bestimmen Sie das Integral $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$ durch partielle Integration mit dem Ansatz $u'(x) = 1$.

Kontrollergebnis:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right) + c = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \mathrm{arsinh} x\right) + c$$

Aufgabe 5 **Anwendungen des bestimmten Integrals**

a) Bestimmen Sie Volumen und Mantelfläche eines Kegels der Höhe 4, dessen Grundfläche den Durchmesser 3 hat.

b) Bestimmen Sie die Länge des Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ über dem Intervall $[0, \sqrt{2}]$ (das ist ein Abschnitt der Normalparabel).
Hinweis: Man kann das Kontrollergebnis aus Aufgabe 3 mit einer linearen Substitution verwenden.

c) Bestimmen Sie die Mantelfläche des Rotationskörpers, der durch Drehung des Graphen der Funktion $f(x) = \sin x$ über dem Intervall $[0, \pi]$ um die x-Achse entsteht. Versuchen Sie hier, das Ergebnis in eine möglichst einfache Form zu bringen.
Hinweis: Nach einer geeigneten Substitution kann man das Kontrollergebnis aus Aufgabe 4 verwenden.

Kontrollergebnis: $(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))\pi$

Aufgabe 6 **Potenzreihen**

Bestimmen Sie Konvergenzradius und Konvergenzbereich der folgenden drei Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^3} x^k$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (2 + (-1)^k) x^k$