9. Übung	Mathematik für Informatiker II	SS 2013

Klaus Kriegel

Abgabe: **allgemein:** **21.06.2013, 14:00 Uhr**
Mi/Do-Tutorien: **24.06.2013, 10:00 Uhr**

Aufgabe 1 — **O–Notation I** — 6 **Punkte**

Ordnen Sie die folgenden Funktionsterme aufsteigend nach ihrem asymptotische Wachstum, d.h. wenn f vor g steht, muss $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ gelten. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung, aus der ersichtlich wird, welche Umformungen und Regeln angewendet wurden.

$$f_1(n) = (n/4)^2 \qquad f_2(n) = \log_2\left((n!)^2\right) \qquad f_3(n) = \log_2\left((n^2)!\right)$$

$$f_4(n) = (\log_2 n)^{\log_2 n} \qquad f_5(n) = 9^{\log_3 n} \qquad f_6(n) = 5^{\log_2 n}$$

Markieren Sie alle Abschnitte der Ordnung, deren Funktionen das gleiche asymptotische Wachstum haben (d.h. $f(n) = \Theta(g(n))$)

Aufgabe 2 — **O-Notation II** — 4 **Punkte**

Welche der folgenden Aussagen sind wahr für alle Funktionen $f_1, f_2, g_1, g_2, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$? Begründen Sie positive Antworten anhand der Definitionen und negative Antworten durch geeignete Gegenbeispiele.

a) Aus $f_1(n) \in \mathcal{O}(g_1(n))$ und $f_2(n) \in o(g_2(n))$ folgt $g_1(n) \cdot g_2(n) \in \omega(f_1(n) \cdot f_2(n))$

b) Aus $f_1(n) \in \mathcal{O}(g_1(n))$ und $f_2(n) \in o(g_2(n))$ folgt $f_1(n) + f_2(n) = o(g_1(n) + g_2(n))$

Aufgabe 3 — **Differenzierbarkeit** — $2 + 2$ **Punkte**

Die Funktionen $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ und $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ sind auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert und stetig. In beiden Fällen kann man den Definitionsbereich durch stetige Ergänzung auf ganz $\mathbb{R}$ erweitern. Realisieren Sie diese Erweiterungen (wie?) und untersuchen Sie die Differenzierbarkeit der beiden erweiterten Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$.

Aufgabe 4 — **Ableitungen** — $2 + 2 + 2$ **Punkte**

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen und benennen Sie die dazu verwendeten Regeln:

a) $f(x) = x^2 \sin^2 x^2$

b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^3 x}}$ über dem Intervall $(0, \pi)$

c) $h(x) = \sin \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$ über $\mathbb{R}^+$