7. Übung	Mathematik für Informatiker II	SS 2013

Klaus Kriegel

Abgabe: **allgemein: 07.06.2013, 14:00 Uhr**
Mi/Do-Tutorien: 10.06.2013, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 — alternierende Reihen — $4+2+2$ Punkte

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zugehörige alternierende Reihe, d.h. $s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Ziel dieser Aufgabe ist es, die Konvergenz der alternierenden Reihe nachzuweisen.

a) Beweisen Sie mit verallgemeinerter vollständiger Induktion, dass $s_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Induktionsanfang mit 0 und 1 und danach Fallunterscheidung, ob n gerade oder ungerade ist.

b) Zeigen Sie, dass $s_n \leq a_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Man kann die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ mit $t_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$ verwenden und das Ergebnis aus a) geeignet darauf übertragen (wie?).

c) Zeigen Sie für alle $m \leq n$ die Ungleichung $|s_n - s_m| \leq a_m$ gilt und nutzen Sie diese Eigenschaft, um die Konvergenz von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit dem Cauchy-Kriterium nachzuweisen.

Aufgabe 2 — Geometrische Reihen — $1+2$ Punkte

Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3}{2^{3k-4}} \qquad \text{und} \qquad t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^{k+1}} \qquad \text{wobei} \qquad a_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 3 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Aufgabe 3 — Grenzwert von $\sqrt[n]{n}$ — $2+2+3$ Punkte

a) Verwenden Sie den Grenzwert von $\sqrt[n]{n}$ und das Vergleichskriterium, um zu zeigen, dass für jedes $a > 0$ die Folge $a_n = \sqrt[n]{a}$ den Grenzwert 1 hat.
Hinweis: Machen Sie eine Fallunterscheidung $a \geq 1$ und $a < 1$.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} (4n)^{-\frac{1}{2n}}$.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n} \sqrt[2]{k}}$ mit dem Vergleichskriterium.

Aufgabe 4 — e-Grenzwerte — $1+2+2$ Punkte

Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+2} \qquad b_n = \left(\frac{2n+8}{2n+2}\right)^{2n+4} \qquad c_n = \left(\frac{n^2-2}{n^2}\right)^{2n^2+1}$$