5. Übung — Mathematik für Informatiker II — SS 2013

Klaus Kriegel — **Abgabe: allgemein: 24.05.2013, 12:00 Uhr**

Da durch die Feiertage am 9. und 20. Mai eine Vorlesung und insgesamt sieben Tutorien ausfallen werden, ist dieses Übungsblatt auf zwei Wochen ausgelegt. Einheitlicher Abgabetermin ist für alle Gruppen Freitag, der 24.Mai. Mit der nachfolgenden 6. Übung werden wir dann wieder zu den ursprünglichen Abgabeterminen (allgemein Freitag, aber Montag um 10:00 Uhr für die Mittwochs- und Donnerstagstutorien) zurückkehren.

Aufgabe 1 — **Horner-Schema** — 2 **Punkte**

Füren Sie die folgenden Polynomdivisionen mit dem Horner-Schema aus:

a) $(x^6 - 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 8x + 5) : (x - 2)$

a) $(2x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 8) : (x + 2)$

Aufgabe 2 — **Nullstellen** — $4 + 3 + 2$ **Punkte**

a) Finden Sie alle reellen und (echt) komplexen Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = x^5 + x^3 + 6x^2 + 4x$$

und bestimmen Sie jeweils deren Vielfachheit. Zerlegen Sie damit das Polynom in Faktoren aus $\mathbb{R}[x]$ vom Grad 1 und 2.
Hinweis: Einige Nullstellen sind offensichtlich oder leicht zu raten. Führen Sie dann jeweils eine Polynomdivision aus, um den Grad zu reduzieren.

b) Von einem Polynom $q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$ sei bekannt, dass der Grad 6, $a_6 = 1$, $a_0 = 60$ ist und dass $q(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt. Zeigen Sie, dass $q(x)$ dann mindestens zwei (komplexe) Nullstellen haben muss, deren Betrag kleiner als 2 ist.

c) Finden (konstruieren) Sie ein Polynom $s(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad 6 mit $a_6 = 1$, $a_0 = 60$, das höchstens eine (komplexe oder reelle) Nullstelle hat, deren Betrag kleiner als 2 ist.

Aufgabe 3 — **Rationale Funktionen über $\mathbb{C}$** — **3 Punkte**

Zerlegen Sie die (komplexe) rationale Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ mit $p(x) = (1 + i)x^3 + (3 + 4i)x - 4$ und $q(x) = x^2 + (1 - i)x + 3$ in eine Summe aus einer ganzrationalen und einer echt gebrochenrationalen Funktion.

Aufgabe 4 — **Rationale Funktionen II** — $4 + 3$ **Punkte**

a) Bestimmen Sie die gekürzte Darstellung der rationalen Funktion $\dfrac{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}{x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 4}$ durch Berechnung des ggT **mit dem Euklidischen Algorithmus**.

b) Seien $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ zwei Polynome von Grad $n \geq 1$, wobei wir $ggT(p(x), q(x)) = 1$ voraussetzen und $q(x)$ keine reellen Nullstellen besitzen soll. Zeigen Sie, dass der Graph der rationalen Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ eine beliebige Gerade höchstens in $n + 1$ Punkten schneiden kann.

Aufgabe 5 **Polynominterpolation** $3 + 3$ **Punkte**

a) Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren ein Polynom $p(x)$ von Grad ≤ 4 mit den Stützstellen $(-2, 12), (-1, 6), (0, 2), (1, 0)$ und $(2, 24)$.

b) Berechnen Sie $p(x)$ wie in a) noch einmal mit dem Lagrange-Verfahren.