3. Übung — Mathematik für Informatiker II — SS 2013

Klaus Kriegel

Abgabe: **allgemein:** **03.05.2013, 14:00 Uhr**
Mi/Do-Tutorien: **06.05.2013, 10:00 Uhr**

Aufgabe 1 — Wurzelfunktion — $2+3+4$ Punkte

Das Wurzelsymbol steht hier für die reelle Quadratwurzel, d.h. für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}^+$ ist $\sqrt{x}$ der eindeutig bestimmte Wert aus $\mathbb{R}^+$, dessen Quadrat gleich x ist (und analog ist $\sqrt[k]{x}$ definiert). Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit den Ungleichungen bzw. Ungleichungsumformungen aus dem Skript und verwenden Sie deren Nummerierung in den Begründungen.

a) Zeigen Sie mit einem indirekten Beweis, dass die Wurzelfunktion in $\mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend ist, d.h. dass für beliebige $0 < a < b$ die Ungleichung $0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass für beliebige $a, b \in \mathbb{R}^+$ das geometrische Mittel höchstens so groß wie das arithmetische Mittel sein kann, d.h. dass $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$ gilt. Sie können hier die Aussage aus Teil a) verwenden, auch wenn sie noch nicht bewiesen wurde.

c) Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung der letzten Aussage.

$$\text{Für beliebige } a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^+ \text{ gilt:} \qquad \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}$$

Hinweis: Auch hier dürfen Sie die Monotonieeigenschaft der k-ten Wurzel verwenden.
Als Ansatz kann die folgende Beobachtung helfen: Wenn alle a_i gleich sind, dann gilt die Ungleichung (weil Gleichheit entsteht). Es reicht deshalb zu zeigen, dass unter allen k-Tupeln mit einem festen arithmetischen Mittel a, das geometrische Mittel nicht maximal sein kann, wenn nicht alle a_i gleich sind.

Aufgabe 2 — Ungleichungen — $3+3$ Punkte

Bestimmen Sie die vollständigen Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen. Grafische Verfahren können als Hilfsmittel verwendet werden, aber die volle Punktzahl gibt es nur für Lösungen durch äquivalente Umformungen:

a) $\left|x^2 + 2x\right| > x + 2$ b) $||2y - 4| - 4| \geq 3$

Aufgabe 3 — Komplexe Zahlen — $1+3+2$ Punkte

Weisen Sie die folgenden Beobachtungen durch elementares Nachrechnen und äquivalentes Umformen von Ungleichungen nach:

a) Für alle $0 \neq z \in \mathbb{C}$ ist $z \cdot \overline{-z}$ eine negative reelle Zahl.

b) Für beliebige $w, z \in \mathbb{C}$ gilt die Dreiecksungleichung $|w + z| \leq |w| + |z|$.

Hinweis: Mehrfaches Quadrieren kann hilfreich sein.

c) Zeigen Sie, dass in der Dreiecksungleichung Gleichheit entsteht, wenn $z = r \cdot w$ für ein r aus $\mathbb{R}^+$.