

Aufgabe 1**Extremstellen und Wendepunkte****4 Punkte**

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema und alle Wendepunkte der Funktion $f(x) = 2e^{2x} - 4e^x$. Bestimmen Sie jeweils die Art der lokalen Extrema und Wendepunkte.

Aufgabe 2**Extremalprobleme****4 Punkte**

Ein Schiff soll eine Ladung 120 km stromaufwärts transportieren, gegen eine Strömung von 10 km/h. Im strömungsfreien Wasser kann das Schiff bis zu 35 km/h fahren. Bei x km/h sind die Betriebskosten pro Stunde mit $k(x) = 30 + \frac{x^2}{10}$ Euro anzusetzen. Bestimmen Sie die optimale Geschwindigkeit zur Minimierung der Gesamtkosten.

Hinweis: Wenn man km als Längen- und h als Zeiteinheit festlegt, kann man die Rechnung auch ohne Maßeinheiten ausführen.

Aufgabe 3**Mittelwertsatz****2 + 1 + 3 Punkte**

Nutzen Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung um Folgendes zu zeigen:

a) Das Polynom $p(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 1$ hat keine Nullstellen in \mathbb{R}^+ .

b) Das Polynom $q(x) = x^3 + 3x^2 + 6x - 1$ hat genau eine Nullstelle in \mathbb{R}^+ .

c) Alle lokalen Extrema des Polynoms $r(x) = (x^2 - 5) \cdot (x^2 - 100) \cdot (x - 4) \cdot (x + 3)$ liegen im Intervall $(-10, 10)$. Hier ist eine genaue Begründung gefragt. Versuchen Sie nicht, die stationären Punkte direkt zu bestimmen, sondern argumentieren mit der maximal möglichen Anzahl solcher Punkte und den Nullstellen von $r(x)$.

Aufgabe 4**Regel von Bernoulli-L'Hospital****2 + 2 + 2 Punkte**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\ln(1 + x^2)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^3} - e^x}{x \ln x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)$