Mathematik für Informatiker II **SS 2011**

Klausur **19.07.2011**

Name: ....

Matrikelnummer: ....

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5	Gesamt
Punkte	/7+3	/8	/6	/7	/6	/34+3

Tutor(nur für Übungsteilnehmer in diesem Semester)

☐	☐	☐	☐	☐
Manuel Hartmann	Jakob Krause	Thore Kübart	Stefan Preyer	Mathias Schmerling

	☐	☐	☐
Studiengang	Bachelor Informatik	Diplom Informatik	Sonstiges bitte nennen:

Ich bin einverstanden, dass meine Matrikelnummer mit dem erreichten

Ergebnis auf einer FU-internen Web-Seite erscheint: ☐ **Ja** ☐ **Nein**

Wichtige Hinweise:

1) Bitte den Namen und die Matrikelnummer auf dem Deckblatt und auf allen Zusatzblättern eintragen!

2) Die Lösung der Aufgaben sollte möglichst auf dem entsprechenden Zettel oder der freien Nebenseite zu finden sein. Bitte einen Hinweis auf dem Aufgabenblatt geben, wenn weitere Teile der Lösung auf einem Zusatzblatt stehen.

3) Die Lösungswege sind zu begründen, auch Rechnungen und Umformungen sollten kurz kommentiert werden. Natürlich können in den Begründungen alle in der Vorlesung bewiesenen Fakten und Sätze verwendet werden.

4) Einzig erlaubtes Hilfsmittel ist eine handschriftliche A4-Seite mit selbst gewählten Formeln und Fakten. Eine Tabelle mit den Grundintegralen sowie Werten der Sinus- und Cosinusfunktion ist Bestandteil der Klausur.

Aufgabe 1: **Polynome** $4+3$ **Punkte** $+3$ **Zusatzpunkte**

a) Bestimmen Sie ein Polynom $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad ≤ 3 mit $p(-2) = -24$, $p(0) = 4$, $p(1) = 3$ und $p(2) = 8$.

b) Bestimmen Sie ein Polynom $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad ≤ 4 über das Folgendes bekannt ist:

- $p(-2) = p(0) = 0$ und $p(1) = 12$
- Betrachtet man $p(x)$ als komplexes Polynom, dann ist $p(2+i) = 0$.

c) **Zusatzaufgabe**: Seien $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad 5 und $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad 4. Wie viele Punkte können die Graphen der beiden Polynome gemeinsam haben? Geben Sie an, wie viele Punkte es mindestens und wie viele es höchstens sind und begründen Sie beide Antworten.

Aufgabe 2: **Grenzwerte** $3 + 2.5 + 2.5$ **Punkte**

a) Zeigen Sie **anhand der Definitionen**, dass die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus einer Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und einer beschränkten Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Machen Sie deutlich an welcher Stelle Sie welche Grenzwertregeln verwenden!

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+2}\right)^{n+3}$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{3x}-3e^{x}+2)}{\sin^2 x}$$

Aufgabe 3: **Flächen und Extremwerte** $4 + 2$ **Punkte**

Für jeden rellen Wert $c \in \mathbb{R}$ sei F_c der Flächeninhalt des endlichen Flächenstücks, welches von den Funktionsgraphen der Funktionen $f(x) = (cx)^2$ und $g(x) = -x^2 + 1 + c^2$ eingeschlossen wird (diese schneiden sich in genau zwei Punkten).

a) Bestimmen Sie F_c in Abhängigkeit von c.

b) Gibt es Werte von c, für die F_c ein lokales Extremum hat? Falls es solche Werte gibt, untersuchen Sie, ob es sich um ein lokales Minimum oder Maximum handelt.

Aufgabe 4: **$\mathcal{O}$-Notation** $3+4$ **Punkte**

a) Seien f und g zwei Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}^+$ mit $f(x) \in \Omega(g(x))$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) + g(x) \in \Theta(f(x))$ gilt. Sie können die Begründung anhand der Definitionen oder mit dem Quotientenkriterium ausführen.

b) Vergleichen Sie die folgenden Funktionen bezüglich ihres asymptotischen Wachstums:

$$f_1(n) = \log_2(n!) \qquad f_2(n) = \log_2(4^{(n^2)}) \qquad f_3(n) = 4^{\log_2 n} \qquad f_4(n) = 2^{\log_4(n^2)}$$

Tragen Sie die Ergebnisse des Vergleichs in die folgende Tabelle mit ja/nein-Antworten ein. Gefragt ist jeweils ob die Funktion $f_i(n)$ aus der linken Spalte zu den Klassen $\mathcal{O}(f_j(n))$ der folgenden Spalten gehört oder nicht. Für jede vollständig und korrekt ausgefüllte Zeile gibt es einen Punkt, bei zwei richtigen Antworten in der Zeile einen halben Punkt.

$\in$	$\mathcal{O}(f_1(n))$	$\mathcal{O}(f_2(n))$	$\mathcal{O}(f_3(n))$	$\mathcal{O}(f_4(n))$
$f_1(n)$	ja			
$f_2(n)$		ja		
$f_3(n)$			ja	
$f_4(n)$				ja

Aufgabe 5: **Integrieren** $3+3$ **Punkte**

Berechnen Sie das bestimmte Integral in a) mit Hilfe einer geeigneten Substitution und das unbestimmte Integral in b) mit partieller Integration.

$$a) \quad \int_0^1 \frac{5x}{(x^2+3)^2}\,\mathrm{dx} \qquad\qquad b) \quad \int x^2 \sin x \,\mathrm{dx}$$