Potenzreihen

Reihen (eine kurze Wiederholung)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zahlenfolge $\quad s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ Partialsumme

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unendliche Reihe (Partialsummenfolge)

Notationen:

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$: unendliche Reihe

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$: Reihe konvergiert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) = s$$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \pm\infty$: Reihe divergiert bestimmt gegen $\pm\infty$

Leibniz-Kriterium:

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mon. fallende Nullfolge, dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ gegen ein $s\in\mathbb{R}$ und

$|s-s_n| \leq a_{n+1}$ (Fehlerschätzung)

Def.: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt <u>absolut konvergent</u>, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist. (abs. konv. $\Rightarrow$ konv.)

bedingt konvergent = konvergent, aber nicht absolut konvergent.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \begin{cases} \text{konvergent falls } \alpha > 1 \\ \text{divergent falls } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Majorantenkriterium (Vergleichskriterium):

Wenn $0 \leq |a_k| \leq b_k$ für alle $k \geq k_0$, dann

a) $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konv. $\Longrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konv.

b) $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \infty$ $\Longrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$

Quotientenkriterium:

Wenn $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$ und Folge $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ konvergiert, dann

a) $\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent

b) $\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent

Beweis durch Vergleich mit geometr. Folge.

Übertragung der Begriffe auf Folgen und Reihen von Funktionen.

Def.: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$

- konvergiert punktweise gegen $f : I \to \mathbb{R}$ wenn

  $\forall x \in I \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall n \geq n_0 \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

- konvergiert gleichmäßig gegen f, wenn

  $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall x \in I \;\; \forall n \geq n_0 \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Satz: Sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetig und gleichm. konvergent gegen f, dann ist

1) f stetig
2) für alle $a, b \in I$ $\quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$
3) Wenn alle f_n stetig ableitbar und Folge $(f_i'(x))_{i\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konv. auf I, dann ist f ableitbar und $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$

Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto$ Funktionenreihe $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} f_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Satz (M-Test): Ist $|f_k(x)| \leq M_k$ auf I und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} M_k$ konvergiert, dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ gleichm. und absolut konvergent auf I

Def.: Eine Potenzreihe ist eine Funktionenreihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

- a_k sind die Koeffizienten der Reihe
- $f_k(x) = a_k x^k$ Glieder der Reihe (Monome)
- $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ Partialsummen (Polynome)

Ziel: Darstellung einer Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ als Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, Bestimmung von Funktionswerten, Ableitungen, ...

Def.: Konvergenzbereich einer Potenzreihe

$$M := \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ konvergiert}\}$$

Konvergenzradius

$$R := \begin{cases} \sup\{|x| \mid x \in M\} & \text{falls } M \text{ beschränkt} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Satz: Ist R Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, dann

a) $R = 0 \iff$ Reihe konvergiert nur für $x = 0$

b) $R > 0$ und $0 < \rho < R \Rightarrow$

Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ (die Ableitung) konvergieren absolut und gleichmäßig auf $[-\rho, \rho]$

Folgerung: Der Konvergenzbereich hat die Form

$(-R,R)$ oder $(-R,R]$ oder $[-R,R)$ oder $[-R,R]$

Bestimmung von R:

a) Wenn $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ existiert oder ∞ ist,

dann $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$

b) Wenn $L = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ existiert, dann

$$R = \begin{cases} 1/L & \text{falls } L>0 \\ \infty & \text{falls } L=0 \end{cases}$$

Folgerung: Ableitung und Stammfunktionen wie bei Polynomen, d.h. ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ Potenzreihe mit Konvergenzradius R und $f(x) \doteq \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

auf $(-R,R)$, dann

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad \text{und}$$

$$\int f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + c \quad \text{mit Konvergenzradius } R$$

Spezielle Potenzreihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{geometr. Reihe } R=1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1}$$ Ableitung

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1-(-x)}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$$ Integral $(R=1)$

Weitere:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

Wie kommt man auf diese Formeln?

Taylor-Reihen

Def.: Ist $f: I \to \mathbb{R}$ n-fach differenzierbar auf I und $a \in I$, dann nennt man

$$T_n(x,a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$ das n-te Taylor-Polynom von f im Punkt a

Satz: Ist $f: I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-fach diff.-bar auf I, I offenes Intervall und $a \in I$ dann gilt

$$f(x) = T_n(x,a) + R_{n+1}(x,a)$$ mit

$$R_{n+1}(x,a) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$ (Restglied nach Cauchy) bzw.

$R_{n+1}(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ für ein ξ zwischen x und a (Restglied nach Lagrange)

Spezialfall $a = 0$ und f beliebig oft ableitbar

$\rightsquigarrow$ Potenzreihe für $f(x)$

Bsp.: • $f(x) = \sin x$

$$f(0) = \sin 0 = 0$$
$$f'(0) = \cos 0 = 1$$
$$f^{(2)}(0) = -\sin 0 = 0$$
$$f^{(3)}(0) = -\cos 0 = -1$$

Zyklus

$$\sin x = 0 + x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 \ldots$$

• $g(x) = e^x$

$$g(0) = e^0 = 1$$
$$g'(0) = g''(0) = \ldots = e^0 = 1$$

$$\Longrightarrow e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k \quad (\text{mit } 0! = 1)$$

Fehlerabschätzung:

$$\left| \sin x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!} \right| = \left| \frac{\sin \xi}{10!} \cdot x^{10} \right|$$

$$\leq \frac{10^5}{3{,}6 \cdot 10^7} < 0{,}003 \text{ für alle } |x| \leq \pi$$