A1: Zu zeigen ist Divergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gegen ∞, d.h.

$$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \sum_{k=0}^{n} a_k > K$$

Idee: Wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ sind ab einem n_1 alle $a_n > \frac{a}{2}$

n_0 muss genügend solche a_n sammeln, dass sie insgesamt mehr als $K + \sum_{k=0}^{n_1-1} a_k$ ergeben.

Voraussetzung ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 \ \forall n \geq n_1 \ |a_n - a| < \varepsilon$$

Setzen $\varepsilon = \frac{a}{2}$, dann ist für alle $n \geq n_1$

$$|a_n - a| < \frac{a}{2} \iff \underbrace{-\frac{a}{2} < a_n - a}_{\Downarrow \ \frac{a}{2} < a_n} < \frac{a}{2}$$

Sei K aus der Behauptung gegeben

$$K_1 = \sum_{k=0}^{n_1-1} a_k \quad \text{und} \quad K_2 = \max(-K_1 + K, 0)$$

setze $n_0 = n_1 + \left\lceil K_2 \cdot \frac{2}{a} \right\rceil$ und betrachte ein $n \geq n_0$

Wir beweisen jetzt die Behauptung $\sum_{k=0}^{n} a_k > K$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n_1-1} a_k + \sum_{k=n_1}^{n} a_k$$

$$\geq K_1 + (n+1-n_1)\,a/2 \qquad \Big|\ \text{weil alle } a_k > \tfrac{a}{2}$$

$$\geq K_1 + (n_0 - n_1)\cdot \tfrac{a}{2} \qquad \Big|\ \text{weil } n \geq n_0$$

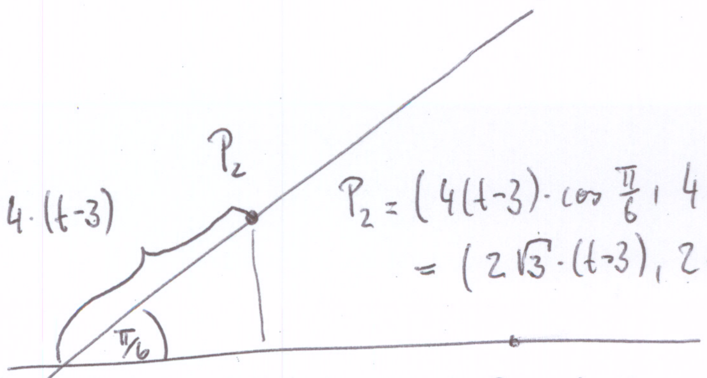
$$= K_1 + \left(n_1 + \left\lceil K_2 \cdot \tfrac{2}{a} \right\rceil - n_1\right)\cdot \tfrac{a}{2} \qquad \Big|\ \text{Def. von } n_0$$

$$\geq K_1 + K_2 \cdot \tfrac{2}{\cancel{a}} \cdot \tfrac{\cancel{a}}{\cancel{2}}$$

$$\geq K_1 + (-K_1 + K) \qquad \Big|\ K_2 = \max(-K_1+K, 0)$$

$$= K \qquad \square$$

A2: Skizze



$$P_2 = \left(4(t-3)\cdot \cos\tfrac{\pi}{6},\ 4(t-3)\sin\tfrac{\pi}{6}\right)$$
$$= \left(2\sqrt{3}\cdot(t-3),\ 2\cdot(t-3)\right)$$

$$P_1 = (\sqrt{3}\cdot t, 0)$$

Der quadratische Abstand zwischen P_1 und P_2:

$$q(t) = \left(\sqrt{3}\cdot t - 2\cdot\sqrt{3}\,(t-3)\right)^2 + \left(2\,(t-3)\right)^2$$

$$= \left(-\sqrt{3}\cdot t + 6\sqrt{3}\right)^2 + (2t-6)^2 = 3t^2 - 36t + 3\cdot 36 + 4t^2 - 24t + 36$$

$$= 7t^2 - 60t + 144$$

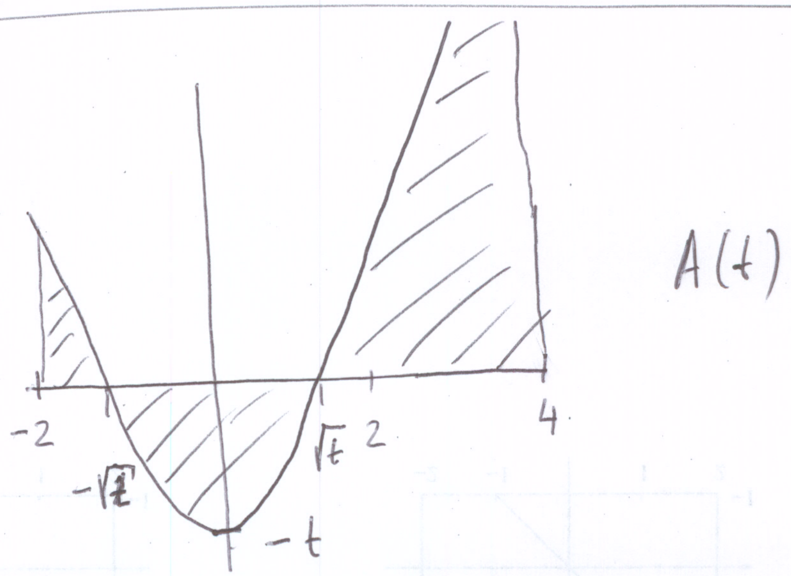
Minimumbestimmung durch Ableitung:

$$g'(t) = 14t - 60 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{60}{14} = \frac{30}{7}$$

$$g''(t) = 14 < 0 \Rightarrow \text{Minimum an der Stelle } t = \frac{30}{7}$$

A3:



$f(x) = x^2 - t$ hat Nullstellen bei $x = \pm\sqrt{t}$

Stammfunktion $F(x) = \frac{x^3}{3} - tx$

$$A(t) = \Big[F(x)\Big]_{-2}^{-\sqrt{t}} - \Big[F(x)\Big]_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} + \Big[F(x)\Big]_{\sqrt{t}}^{4}$$

$$= -F(-2) + 2\cdot F(-\sqrt{t}) - 2\cdot F(\sqrt{t}) + F(4)$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 2t\right) + 2\left(-\frac{\sqrt{t}^3}{3} + \sqrt{t}^3\right) - 2\left(\frac{\sqrt{t}^3}{3} - \sqrt{t}^3\right) + \frac{64}{3} - 4t$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{t}^3 - 6t + \frac{72}{3}$$

Minimum mit Ableitung nach t:

$$A'(t) = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \sqrt{t} - 6 = 4\sqrt{t} - 6$$

$$A'(t) = 0 \implies \sqrt{t} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \implies t = \frac{9}{4}$$

$$A''(t) = \frac{2}{\sqrt{t}}$$

$A''\left(\frac{9}{4}\right) > 0 \implies$ Minimum für $t = 9/4$

A4:

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = x \cdot \sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2 + 1 - 1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$$

$u'(x) = 1 \quad v(x) = \sqrt{1+x^2}$

$u(x) = x \quad v'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$= x \cdot \sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\, dx + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$$

$$\implies 2 \int \sqrt{1+x^2}\, dx = x \cdot \sqrt{1+x^2} + \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx}_{= \operatorname{arsinh} x}$$

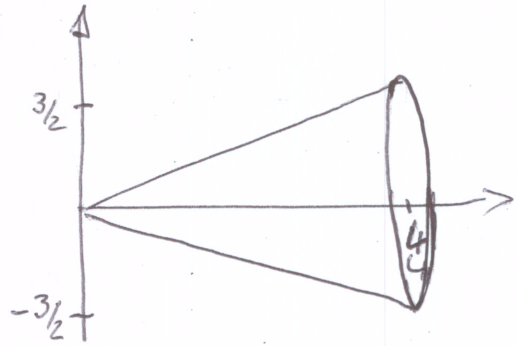
$$\implies \int \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x \cdot \sqrt{1+x^2} + \operatorname{arsinh} x\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right) + C$$

A5:

a) Der Kegel entsteht durch Rotation von $f(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot x$

und die x-Achse Intervall $[0,4]$



$$V = \int_0^4 \pi \cdot f^2(x)\,dx = \pi \int_0^4 \frac{3}{8} x\,dx = \pi \left[\frac{3}{16} x^2\right]_0^4$$

$$= \pi \left(\frac{3}{16} \cdot 16 - 0\right) = 3\pi$$

---

b) Zur Längenbestimmung berechnet man

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \qquad \text{wobei } f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x$$

$$\int \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{1+t^2}\,dt \overset{A4}{=} \frac{1}{4}\left(t\sqrt{1+t^2} + \operatorname{arsinh} t\right)$$

Subst. $2x = t$

$dt = 2\,dx$

Resubst.

$$= \frac{1}{4}\left(2x\sqrt{1+4x^2} + \ln\left(2x + \sqrt{1+4x^2}\right)\right)$$

$$L = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{4}\Big(2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+4\sqrt{2}} + \ln\big(2\sqrt{2}+\sqrt{1+4\sqrt{2}}\big)$$
$$- 0 - \ln 1\Big)$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2} + \frac{1}{4}\ln\big(2\sqrt{2}+\sqrt{1+4\sqrt{2}}\big)$$

weitere Vereinfachungen nicht möglich!

---

c)

$$M = \int_0^{\pi} 2\pi\cdot f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \quad \text{mit } f(x) = \sin x$$

$$\int 2\pi\cdot\sin x\cdot\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx = -2\pi\int\sqrt{1+t^2}\,dt$$

subst $\cos x = t$

$dt = -\sin x\,dx$

A4

$$\stackrel{\downarrow}{=} -\pi\left(t\cdot\sqrt{1+t^2} + \ln\big(t+\sqrt{1+t^2}\big)\right)$$

Resubst.

$$= -\pi\left(\cos x\sqrt{1+\cos^2 x} + \ln\big(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\big)\right)$$

$$M = \Big[\;\text{———} \;''\; \text{———}\;\Big]_0^{\pi}$$

$$= -\pi\Big(-1\cdot\sqrt{2} + \ln\big(-1+\sqrt{2}\big) - 1\cdot\sqrt{2} - \ln\big(1+\sqrt{2}\big)\Big)$$

$$= 2\pi\cdot\sqrt{2} + \Big(\ln\big(1+\sqrt{2}\big) - \ln\big(-1+\sqrt{2}\big)\Big)\cdot\pi$$

$$= 2\pi\sqrt{2} + \pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)$$

Kontrollergebnis auf Aufgabenzettel war nicht korrekt!

A6: bei a) und b) kann Konvergenzradius R mit Quotientenkriterium bestimmt werden, bei c) verwendet man die n-te Wurzel!

a) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(1 - \frac{2k+1}{(k+1)^2}\right)$

$= 1 - 0 = 1$

$\Rightarrow R = 1$

Konvergenzbereich: Verhalten bei $x = -R$ und $x = R$ muss untersucht werden.

$x = -1 \qquad \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot k^2$ diverglert

$x = 1 \qquad \sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2$ divergiert

weil $(-1)^k \cdot k^2$ und k^2 keine Nullfolgen sind

$\Rightarrow M = (-1, 1)$

---

b) $R = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{2^k (k+1)^3}{k^3 \, 2^{k+1}}$

$= \frac{1}{2} \lim\limits_{k\to\infty} \frac{(k+1)^3}{k^3} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{2}$: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k^3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3}$ konvergiert (Leibniz-Kriterium)

$x = \frac{1}{2}$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k^3} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ konvergiert (Satz aus VL)

$M = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

c) $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{2+(-1)^k} = 1$

weil $1 \le a_k \le k$

und $\left.\begin{array}{l} \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{1} = 1 \\ \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1 \end{array}\right\}$ Vergleichskrit.

$\Longrightarrow R = 1$

$x = -1$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot (2+(-1)^k)$ divergiert

$x = 1$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty} (2+(-1)^k)$ divergiert

weil $2+(-1)^k$ keine Nullfolge ist.

$\Longrightarrow M = (-1, 1)$

Achtung für $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ wäre $R = 1$ und $M = [-1, 1]$

und für $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ wäre $R = 1$ und $M = [-1, 1)$