Mathematik für Informatiker II — SS 2013

Musterlösung zur 9. Übung, Aufgabe 1

Aufgabe 1 — O–**Notation I** — 6 **Punkte**

Ordnen Sie die folgenden Funktionsterme aufsteigend nach ihrem asymptotische Wachstum, d.h. wenn f vor g steht, muss $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ gelten. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung, aus der ersichtlich wird, welche Umformungen und Regeln angewendet wurden.

$$f_1(n) = (n/4)^2 \qquad f_2(n) = \log_2\left((n!)^2\right) \qquad f_3(n) = \log_2\left((n^2)!\right)$$

$$f_4(n) = (\log_2 n)^{\log_2 n} \qquad f_5(n) = 9^{\log_3 n} \qquad f_6(n) = 5^{\log_2 n}$$

Markieren Sie alle Abschnitte der Ordnung, deren Funktionen das gleiche asymptotische Wachstum haben (d.h. $f(n) = \Theta(g(n))$)

Lösung: Wir beginnen mit einigen Umformungsschritten, die uns das Ordnen erleichtern werden.

$$\begin{aligned}
f_1(n) &= (n/4)^2 = \frac{1}{16}n^2 \in \Theta(n^2) \\
f_2(n) &= \log_2\left((n!)^2\right) = 2\log_2(n!) \in \Theta(n \log n) \\
f_3(n) &= \log_2\left((n^2)!\right) \in \Theta(n^2 \log(n^2)) = \Theta(n^2 \log n) \qquad \text{Setze } m = n^2 \\
f_4(n) &= (\log_2 n)^{\log_2 n} = 2^{\log_2(\log_2 n) \cdot \log_2 n} = n^{\log_2(\log_2 n)} \\
f_5(n) &= 9^{\log_3 n} = 3^{2\log_3 n} = n^2 \\
f_6(n) &= 5^{\log_2 n} = n^{\log_2 5}
\end{aligned}$$

Damit ist die richtige Reihenfolge: $f_2(n), \underbrace{f_1(n), f_5(n)}_{\text{asympt. gleich}}, f_3(n), f_6(n), f_4(n)$.

Dabei ist $f_3(n) \in o(f_6(n))$ weil $2 < log_2 5$ und $f_6(n) \in o(f_4(n))$ weil $\lim_{n\to\infty} \log_2(\log_2 n) = \infty$.

Aufgabe 3 **Differenzierbarkeit** $2+2$ **Punkte**

Die Funktionen $f(x) = x\,\sin\frac{1}{x}$ und $g(x) = x^2\,\sin\frac{1}{x}$ sind auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definiert und stetig. In beiden Fällen kann man den Definitionsbereich durch stetige Ergänzung auf ganz $\mathbb{R}$ erweitern. Realisieren Sie diese Erweiterungen (wie?) und untersuchen Sie die Differenzierbarkeit der beiden erweiterten Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$.

Lösung: Zunächst kümmern wir uns um die *stetigen Fortsetzungen* von f und g nach 0. Stelle dazu fest, dass

$$\lim_{x\to 0}\, f(x) = \lim_{x\to 0}\, x\sin\frac{1}{x} = 0$$

ist, da $\sin\frac{1}{x}$ beschränkt ist und x gegen Null konvergiert (benutze also die Übertragung der Aussage „Beschränkte Folge mal Nullfolge gibt Nullfolge“ in die Welt der Grenzwerte von Funktionswerten).[1] Mit derselben Argumentation erhalten wir

$$\lim_{x\to 0}\, g(x) = \lim_{x^2\to 0}\, x^2\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Damit haben wir die stetigen Fortsetzungen

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \hat{g}(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gefunden. Nun also zur *Differenzierbarkeit* in $x_0 = 0$.[2] Dazu betrachten wir für $x_0 = 0$ die Differenzenquotienten

$$\hat{f}'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\hat{f}(x_0+h) - \hat{f}(x_0)}{h} \qquad \text{und} \qquad \hat{g}'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\hat{g}(x_0+h) - \hat{g}(x_0)}{h}.$$

[1] Etwas direkter und formaler kann man so argumentieren:
Wegen $|\sin\frac{1}{x}| \le 1$ ist offenbar

$$|x\sin\frac{1}{x}| \le |x|\cdot 1 = |x| \longrightarrow 0 \text{ für } x\to 0.$$

Die Beträge wird man zum Beispiel mit dem Vergleichskriterium los: Es ist nämlich

$$-|x| \le x\sin\frac{1}{x} \le |x|.$$

[2] Die Differenzierbarkeit in allen $x_0 \neq 0$ ist klar, da wir dort jeweils eine geschlossene Formel für die Funktionen haben, die wir per Produkt- und Kettenregel differenzieren können.

Wir erhalten

$$\hat{f}'(x_0) = \hat{f}'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\hat{f}(0+h) - \hat{f}(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\hat{f}(h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \sin \frac{1}{h}.$$

Dieser Grenzwert existiert nicht, da $\sin \frac{1}{h}$ für $h \to 0$ zwischen -1 und 1 oszilliert. Damit ist $\hat{f}$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht diffenzierbar. Für $\hat{g}$ erhalten wir

$$\hat{g}'(x_0) = \hat{g}'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\hat{g}(0+h) - \hat{g}(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\hat{g}(h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

Also ist $\hat{g}$ an der Stelle $x_0 = 0$ diffenzierbar und es gilt $\hat{g}'(0) = 0$.