Mathematik für Informatiker II — SS 2013

Musterlösung zur 9. Übung, Aufgabe 1

Aufgabe 1 — O–**Notation I** — 6 **Punkte**

Ordnen Sie die folgenden Funktionsterme aufsteigend nach ihrem asymptotische Wachstum, d.h. wenn f vor g steht, muss $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ gelten. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung, aus der ersichtlich wird, welche Umformungen und Regeln angewendet wurden.

$$f_1(n) = (n/4)^2 \qquad f_2(n) = \log_2((n!)^2) \qquad f_3(n) = \log_2((n^2)!)$$

$$f_4(n) = (\log_2 n)^{\log_2 n} \qquad f_5(n) = 9^{\log_3 n} \qquad f_6(n) = 5^{\log_2 n}$$

Markieren Sie alle Abschnitte der Ordnung, deren Funktionen das gleiche asymptotische Wachstum haben (d.h. $f(n) = \Theta(g(n))$)

Lösung: Wir beginnen mit einigen Umformungsschritten, die uns das Ordnen erleichtern werden.

$$\begin{aligned}
f_1(n) &= (n/4)^2 = \frac{1}{16}n^2 \in \Theta(n^2) \\
f_2(n) &= \log_2((n!)^2) = 2\log_2(n!) \in \Theta(n \log n) \\
f_3(n) &= \log_2((n^2)!) \in \Theta(n^2 \log(n^2)) = \Theta(n^2 \log n) \qquad \text{Setze } m = n^2 \\
f_4(n) &= (\log_2 n)^{\log_2 n} = 2^{\log_2(\log_2 n)\cdot \log_2 n} = n^{\log_2(\log_2 n)} \\
f_5(n) &= 9^{\log_3 n} = 3^{2\log_3 n} = n^2 \\
f_6(n) &= 5^{\log_2 n} = n^{\log_2 5}
\end{aligned}$$

Damit ist die richtige Reihenfolge: $f_2(n), \underbrace{f_1(n), f_5(n)}_{\text{asympt. gleich}}, f_3(n), f_6(n), f_4(n)$.

Dabei ist $f_3(n) \in o(f_6(n))$ weil $2 < log_2 5$ und $f_6(n) \in o(f_4(n))$ weil $\lim_{n\to\infty} \log_2(\log_2 n) = \infty$.