Mathematik für Informatiker II — SS 2013

Musterlösung zur 8. Übung, Aufgabe 4

Aufgabe 4 — **Stetigkeit** — $3+3$ **Punkte**

a) Zeigen Sie **anhand der Definition**, dass die Funktion $f(x) = x^3$ gleichmäßig stetig auf dem Intervall $[0, 20]$ ist.

b) Zeigen Sie **anhand der Definition**, dass die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ nicht gleichmäßig stetig auf dem Intervall $(0, 20)$ ist.

Beweis. a) Die Funktion

$$\begin{array}{rccc} f: & (0,20) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x^3} \end{array}$$

ist gleichmäßig stetig auf $[0, 20]$ genau dann wenn

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, x' \in [0,20] \text{ mit } |x - x'| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Um für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ ein passendes δ zu finden, ist es sinnvoll x' als $x + h$ zu schreiben. Damit wird die Bedingung $|x - x'| < \delta$ durch $|h| < \delta$ äquivalent ersetzt. Wir betrachten nun

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= \left|x^3 - (x+h)^3\right| = \left|x^3 - (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3)\right| \\ &= \left|3x^2h + 3xh^2 + h^3\right| \\ &= |h| \cdot \left|3x^2 + 3xh + h^2\right| \end{aligned}$$

Wir schätzen den zweiten Faktor in dem Produkt dadurch ab, dass wir $|h| \le 1$ und $|x| \le 20$ voraussetzen und die Dreiecksungleichung verwenden:

$$\left|3x^2 + 3xh + h^2\right| \le 3 \cdot 20^2 + 3 \cdot 20 \cdot 1 + 1 = 1261$$

Jetzt ist es einfach, ein passendes δ zu finden, nämlich $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1261}\right)$.

Bleibt die Verifizierung unserer Behauptung: Sei $|x - x'| = |h| < \varepsilon$ dann ist

$$|f(x) - f(x')| = |h| \cdot \left|3x^2 + 3xh + h^2\right| \le |h| \cdot 1261 < \frac{\varepsilon}{1261} \cdot 1261 = \varepsilon$$

b) Diesen Beweis führen wir indirekt. Angenommen

$$\begin{array}{rccc} f: & (0,20) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x^2} \end{array}$$

ist gleichmäßig stetig. Wir zeigen einen Widerspruch für $\varepsilon = 1$

Fall 1: $\delta \ge 1$ Wir wählen dann $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$. Es gilt dann $|1 - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} < \delta$, aber

$$\left|\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - 1\right| = 3 > \varepsilon$$

Das ist ein Widerspruch zur Annahme $\varepsilon = 1$

Fall 2: $\delta < 1$ Wir wählen dann $x = \delta, y = \frac{\delta}{2}$. Es gilt $|x - y| = |\delta - \frac{\delta}{2}| = \frac{\delta}{2} < \delta$, aber es

$$\left| \frac{1}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} - \frac{1}{\delta^2} \right| = \left| \frac{4-1}{\delta^2} \right| = 3 \cdot \frac{1}{\delta^2} > 1$$

Also ein Widerspruch zu Annahme $\varepsilon = 1$

$\square$