6. Übung Mathematik für Informatiker II SS 2013

Klaus Kriegel **Musterlösung von Olaf Parczyk und Titus Laska**

Aufgabe 1. ***Konvergenz und bestimmte Divergenz***

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *drei Folgen mit*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad (\forall\, n \in \mathbb{N} \quad b_n \neq 0) \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = \infty$$

Begründen Sie die folgenden Konvergenzen und bestimmten Divergenzen an Hand der Definitionen.

$$a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = 0 \qquad b) \quad \lim_{n\to\infty} a_n \cdot c_n = \infty \qquad c) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{|b_n|} = \infty$$

d) Warum sind die Betragsstriche in c) wichtig? Finden Sie ein Beispiel dafür, dass die Folge aus c) ohne Betragsstriche unbestimmt divergiert!

Lösung. a)

$$\lim_{\mathbf{n}\to\infty} \frac{\mathbf{a_n}}{\mathbf{c_n}} = \mathbf{0}$$

Überlegung Die hier dargestellte Vorüberlegung soll einen Ansatz vermitteln, wie man auf eine Lösung der Aufgabe kommen kann. Als Lösung reicht es aber natürlich, den untenstehenden Beweis aufzuschreiben.

Benutze die Definitionen.

$$\begin{aligned} \text{Haben (Voraussetzung):}\ & \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad |a_n - a| < \epsilon. \\ & \forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_1 \quad c_n > K. \\ \text{Wollen (Behauptung):}\ & \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_2 \quad \left|\frac{a_n}{c_n} - 0\right| < \epsilon. \end{aligned}$$

Forme die Zielungleichung $|\frac{a_n}{c_n} - 0| < \epsilon$ um:

$$\left|\frac{a_n}{c_n} - 0\right| < \epsilon \iff |a_n| < \epsilon |c_n| \iff |c_n| > \frac{|a_n|}{\epsilon}.$$

Das sähe mit $K = \frac{|a_n|}{\epsilon}$ bis auf die Betragsstriche schon wie unsere zweite Voraussetzung aus. Wegen der Reihenfolge der Quantoren in der Definition darf K aber nicht von dem Index n in a_n abhängen. Das müssen wir noch beheben.

Aber wir haben ja auch noch nicht die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ benutzt. Aus Konvergenz folgt Beschränktheit (Vorlesung!):

$$\exists L > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ |a_n| < L$$

Falls wir jetzt $|c_n| > L\epsilon$ zeigen könnten, hätten wir bereits $|c_n| > \frac{|a_n|}{\epsilon}$, denn es ist ja für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|c_n| > L\epsilon > \frac{|a_n|}{\epsilon}.$$

Das geht aber leicht: Mit der Wahl $K = \frac{L}{\epsilon}$ in unserer Voraussetzung folgt jetzt wegen $|c_n| > c_n$ die Behauptung (und damit ist auch die Sache mit den Betragsstrichen erledigt!).

Beweis Zu zeigen ist

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_2 \quad |\frac{a_n}{c_n} - 0| < \epsilon.$$

Sei also $\epsilon > 0$ gegeben.

Nach Voraussetzung konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Daher ist sie beschränkt und es existiert $L > 0$ sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ $|a_n| < L$ gilt.

Setze $K = \frac{L}{\epsilon}$. Wegen $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $n > n_1$

$$|c_n| \geq c_n > K = \frac{L}{\epsilon} > \frac{|a_n|}{\epsilon}$$

gilt. Das ist äquivalent zu $\frac{a_n}{c_n} < \epsilon$ und das war zu zeigen (also $n_2 = n_1$)). □

b)

$$\lim_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{a_n} \cdot \mathbf{c_n} = \infty$$

Die Überlegung hierzu verläuft ganz analog zu Teil a). Es stellt sich dabei heraus, dass in diesem Fall eine untere Schranke M für die a_n benötigt wird.

Beweis Zu zeigen ist

$$\forall K' \in \mathbb{R} \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_2 \quad a_n c_n > K'.$$

Sei also $K' \in \mathbb{R}$ gegeben.

Nach Voraussetzung konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Daher ist sie beschränkt und es existiert $L > 0$ sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ $|a_n| < L$ gilt. Insbesondere ist $M := -L$ untere Schranke für die Folgenglieder:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > M = -L.$$

Setze $K = \frac{K'}{M}$. Wegen $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $n > n_1$

$$c_n > K = \frac{K'}{M} > \frac{K'}{a_n}$$

gilt. Das ist äquivalent zu $a_n c_n < K'$ und das war zu zeigen. □

c)

$$\lim_{\mathbf{n}\to\infty} \frac{\mathbf{a_n}}{|\mathbf{b_n}|} = \infty$$

Wir wissen:

$$i)\ \lim_{n\to\infty} a_n = a > 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 |a_n - a| < \epsilon,$$
$$ii)\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists\, n_1 \in \mathbb{N} \forall n > n_1 |b_n| < \epsilon.$$

Wir wollen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{|b_n|} = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \frac{a_n}{|b_n|} > K.$$

Sei also $K \in \mathbb{R}$. Für $\epsilon = \frac{a}{1+K}$ wenden wir die Vorraussetzungen an. Dann gilt für alle $n > \max\{n_0, n_1\}$ zum einen $a_n > a - \epsilon$, $|b_n| < \epsilon$ und damit

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{|b_n|} > \frac{a-\epsilon}{|b_n|} > \frac{a-\epsilon}{\epsilon} &= K \\ \Leftrightarrow a - \epsilon &= K\epsilon \\ \Leftrightarrow \epsilon &= \frac{a}{1+K}. \end{aligned}$$

d) **Wichtigkeit der Betragsstriche**

Der Betrag in Aufgabe c) ist wichtig, weil die Nullfolge b_n auch von der negativen Seite bzw. alternierend gegen Null konvergieren kann und damit die Quotientenfolge weder konvergiert noch bestimmt divergiert. Beispiel: $a_n = 1$, $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(-1)^n \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n n \text{ divergiert unbestimmt.}$$

$\square$

Aufgabe 2. *Lösung:*

Grenzwertregeln:

$$(i) \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$(ii) \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$(iii) \lim_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b} \qquad \textit{(falls } b \neq 0 \textit{ und } b_n \neq 0 \textit{ für alle } n \in \mathbb{N}\textit{)}$$

$$(iv) \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$$

$$(v) \lim_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|} = \sqrt{|a|}$$

c)

$$\begin{aligned}
\sqrt{2n+\sqrt{n}} - \sqrt{2n-\sqrt{n}} &= \sqrt{2n+\sqrt{n}} - \sqrt{2n-\sqrt{n}}\frac{\sqrt{2n+\sqrt{n}} + \sqrt{2n-\sqrt{n}}}{\sqrt{2n+\sqrt{n}} + \sqrt{2n-\sqrt{n}}} \\
&= \frac{(2n+\sqrt{n}) - (2n-\sqrt{n})}{\sqrt{2n+\sqrt{n}} + \sqrt{2n-\sqrt{n}}} \\
&= \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{n}}} + \sqrt{2-\frac{1}{\sqrt{n}}})} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{n}}} + \sqrt{2-\frac{1}{\sqrt{n}}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{n}}} + \sqrt{2-\frac{1}{\sqrt{n}}}} &\overset{(iii)}{=} \frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{n}}} + \sqrt{2-\frac{1}{\sqrt{n}}})} \\
&\overset{(v)}{=} \frac{2}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} (2+\frac{1}{\sqrt{n}})} + \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} (2-\frac{1}{\sqrt{n}})}} \\
&\overset{(i)}{=} \frac{2}{\sqrt{2+\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}} + \sqrt{2-\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2-0}} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$