6. Übung

Aufgabe 1

Lösung:

c) Wir wissen:

$$\begin{aligned} i)\ &\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 |a_n - a| < \epsilon, \\ ii)\ &\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists\, n_1 \in \mathbb{N} \forall n > n_1 |b_n| < \epsilon. \end{aligned}$$

Wir wollen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{|b_n|} = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \frac{a_n}{|b_n|} > K.$$

Sei also $K \in \mathbb{R}$. Für $\epsilon = \frac{a}{1+K}$ wenden wir die Vorraussetzungen an. Dann gilt für alle $n > \max\{n_0, n_1\}$ zum einen $a_n > a - \epsilon$, $|b_n| < \epsilon$ und damit

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{|b_n|} > \frac{a-\epsilon}{|b_n|} > \frac{a-\epsilon}{\epsilon} &= K \\ \Leftrightarrow a - \epsilon &= K\epsilon \\ \Leftrightarrow \epsilon &= \frac{a}{1+K}. \end{aligned}$$

d) Der Betrag in Aufgabe c) ist wichtig, weil die Nullfolge b_n auch von der negativen Seite bzw. alternierend gegen Null konvergieren kann und damit die Quotientenfolge weder konvergiert noch bestimmt divergiert. Beispiel: $a_n = 1$, $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(-1)^n \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n n \text{ divergiert unbestimmt.}$$

Aufgabe 2

Lösung:

Grenzwertregeln:

$$\begin{aligned} (i)\ &\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b \\ (ii)\ &\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b \\ (iii)\ &\lim_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b} \qquad \text{(falls } b \neq 0 \text{ und } b_n \neq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}) \\ (iv)\ &\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a| \\ (v)\ &\lim_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|} = \sqrt{|a|} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\sqrt{2n+\sqrt{n}}-\sqrt{2n-\sqrt{n}} &= \sqrt{2n+\sqrt{n}}-\sqrt{2n-\sqrt{n}}\frac{\sqrt{2n+\sqrt{n}}+\sqrt{2n-\sqrt{n}}}{\sqrt{2n+\sqrt{n}}+\sqrt{2n-\sqrt{n}}} \\
&= \frac{(2n+\sqrt{n})-(2n-\sqrt{n})}{\sqrt{2n+\sqrt{n}}+\sqrt{2n-\sqrt{n}}} \\
&= \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{2-\frac{1}{\sqrt{n}}})} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{2-\frac{1}{\sqrt{n}}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{2-\frac{1}{\sqrt{n}}}} &\overset{(iii)}{=} \frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{2-\frac{1}{\sqrt{n}}})} \\
&\overset{(v)}{=} \frac{2}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{\sqrt{n}})}+\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}(2-\frac{1}{\sqrt{n}})}} \\
&\overset{(i)}{=} \frac{2}{\sqrt{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2-0}} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$