5. Übungsblatt

28. Juni 2013

Aufgabe 2b

Von einem Polynom $q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$ *sei bekannt, dass der Grad* 6, $a_6 = 1$, $a_0 = 60$ *ist und dass* $q(x)$ *keine reellen Nullstellen besitzt. Zeigen Sie, dass* $q(x)$ *dann mindestens zwei (komplexe) Nullstellen haben muss, deren Betrag kleiner als* 2 *ist.*

Beweis. Wir werden die Aussage mit Hilfe eines Widerspruchsbeweis zeigen.

Annahme:
Es gibt höchstens eine Nullstelle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 2$.
Dazu können jetzt zwei Fälle unterschieden werden.

1. Fall: Es existiert genau eine Nullstelle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 2$.

Es ist bekannt, dass $q(x)$ nur komplexe Nullstellen besitzt und für den Betrag von komplexen Zahlen gilt $|x| = |\bar{x}|$. Somit ist auch $\bar{x}$ eine Nullstelle von $q(x)$ mit $|\bar{x}| < 2$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme (1. Fall).

2. Fall: Es existiert keine Nullstelle in $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 2$.

Man mache sich klar, dass man das Polynom $q(x) = \sum_{k=0}^{6} a_k x^k$ auch darstellen kann als Linearkombination seiner Nullstellen $q(x) = c \cdot \prod_{n=0}^{6}(x - b_n)$, wobei c eine Konstante und b_n die Nullstellen von $q(x)$ sind.
(Anmerkung: Die Konstante c ist gerade der Faktor a_6 unseres Polynoms $q(x)$. Man mache sich klar, dass ein beliebiges Polynom geschrieben werden kann als

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n(x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} x^k)$$

und man lediglich den in Klammern gesetzten Teil in die Form $\prod_{k=0}^{n}(x - b_k)$ bringt.)
Wir nutzen nun unser Wissen $a_6 = 1$ aus und folgern, dass $c = 1$, d.h. der konstante Faktor hat keinen weiteren Einfluss auf unsere Überlegungen.

Löst man $q(x) = c \cdot \prod_{n=0}^{6}(x - b_n)$ auf um die Form $q(x) = \sum_{k=0}^{6} a_k x^k$ zu erhalten, so sieht man, dass a_0 sich gerade aus der Multiplikation aller Nullstellen also $\prod_{n=0}^{6} b_n$ ergibt. Es gilt also $a_0 = 60 = \prod_{n=0}^{6} b_n$. Wir nehmen in diesem Fall an, dass keine der sechs möglichen Nullstellen betragsmäßig kleiner als 2 ist, d.h. alle Nullstellen sind betragsmäßig größer als 2. Folglich gilt

$$60 = a_0 = \prod_{n=0}^{6} b_n \geq \prod_{n=0}^{6} 2 = 2^6 = 64.$$

Dies ist offensichtlich nicht möglich und somit ein Widerspruch zu Annamhe (2. Fall).
Wir haben nun gezeigt, dass die beiden einzig möglichen Fälle, die sich aus unserer Annahme ergeben, nicht zutreffen können. Somit ist unsere Annahme falsch und die ursprüngliche Aussage bewiesen. $\square$