3. Übung	Mathematik für Informatiker II	SS 2013

Klaus Kriegel

Abgabe: **allgemein:** **03.05.2013, 14:00 Uhr**
Mi/Do-Tutorien: **06.05.2013, 10:00 Uhr**

Aufgabe 1 **Wurzelfunktion** $2+3+4$ **Punkte**

Das Wurzelsymbol steht hier für die reelle Quadratwurzel, d.h. für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}^+$ ist $\sqrt{x}$ der eindeutig bestimmte Wert aus $\mathbb{R}^+$, dessen Quadrat gleich x ist (und analog ist $\sqrt[k]{x}$ definiert). Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit den Ungleichungen bzw. Ungleichungsumformungen aus dem Skript und verwenden Sie deren Nummerierung in den Begründungen.
a) Zeigen Sie mit einem indirekten Beweis, dass die Wurzelfunktion in $\mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend ist, d.h. dass für beliebige $0 < a < b$ die Ungleichung $0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$ gilt.
b) Zeigen Sie, dass für beliebige $a, b \in \mathbb{R}^+$ das geometrische Mittel höchstens so groß wie das arithmetische Mittel sein kann, d.h. dass $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$ gilt. Sie können hier die Aussage aus Teil a) verwenden, auch wenn sie noch nicht bewiesen wurde.
c) Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung der letzten Aussage.

$$\text{Für beliebige } a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^+ \text{ gilt:} \quad \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}$$

Hinweis: Auch hier dürfen Sie die Monotonieeigenschaft der k-ten Wurzel verwenden.
Als Ansatz kann die folgende Beobachtung helfen: Wenn alle a_i gleich sind, dann gilt die Ungleichung (weil Gleichheit entsteht). Es reicht deshalb zu zeigen, dass unter allen k-Tupeln mit einem festen arithmetischen Mittel a, das geometrische Mittel nicht maximal sein kann, wenn nicht alle a_i gleich sind.

Lösungen:

a) Da a und b nach Voraussetzung, $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ nach Definition größer als Null sind, lautet die Kontraposition der Behauptung:

$$\sqrt{a} \geq \sqrt{b} \Longrightarrow a \geq b \quad \text{oder äquivalent} \quad \sqrt{b} \leq \sqrt{a} \Longrightarrow b \leq a$$

Das kann einfach mit der Regel 7 (Skript) abgeleitet werden:
Aus $0 \leq \sqrt{b} \leq \sqrt{a}$ und $0 \leq \sqrt{b} \leq \sqrt{a}$ folgt $0 \leq \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} \leq \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$, also $b \leq a$.

b) Mit den Erkenntnissen aus a) wissen wir jetzt, dass für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^+$ die Äquivalenz $x \leq y \iff x^2 \leq y^2$ gilt. Wir nutzen das zur folgenden äquivalenten Umformung von Ungleichungen beginnend mit der Behauptung und endend mit einer wahren Aussage:

	$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$	Behautung, auf beiden Seiten Quadrieren
$\iff$	$ab \leq \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$	$*4$ nach Regel 2
$\iff$	$4ab \leq a^2 + 2ab + b^2$	$-4ab$ nach Regel 1
$\iff$	$0 \leq a^2 - 2ab + b^2$	Binomische Formel
$\iff$	$0 \leq (a-b)^2$	Wahre Aussage nach Regel 11

Man kann mit einer analogen Umformungkette auch das Folgende zeigen:

$$(*) \qquad \text{Für beliebige } a, b \in \mathbb{R}^+ \text{ mit } a \neq b \text{ gilt} \quad \sqrt{a \cdot b} < \frac{a+b}{2}.$$

c) Wir beginnen mit dem im Hinweis beschriebenen Spezialfall: Ist $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = a$, dann gilt

$$\sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k} = \sqrt[k]{a^k} = a = \frac{k \cdot a}{k} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}$$

und somit auch die $\leq$-Relation zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel.

Für den allgemeinen Fall sei X_a die Menge aller k-Tupel $\vec{v} = (a_1, \ldots, a_k)$ von positiven reellen Zahlen mit dem arithmetischen Mittel a. Weiterhin bezeichne $g(\vec{v})$ das geometrische Mittel des Tupels (zu zeigen ist also $g(\vec{v}) \leq a$). Mit $d(\vec{v}) := \sum_{i=1}^{k} |a_i - a|$ kann man einen Abstand vom Tupel $\vec{v}$ zum Tupel $(a, \ldots, a)$ aus dem Spezialfall definieren.
Da die Reihenfolge der Elemente a_i in $\vec{v}$ bei der Berechnung beider Mittelwerte keine Rolle spielt, können wir beim allgemeinen Fall $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$ vorausetzen. Wenn der Spezialfall nicht vorliegt, ist $a_1 < m < a_k$. Wir konstruieren ein neues Tupel, indem wir den kleinsten und den größten Wert jeweils durch ihr arithmetisches Mittel ersetzen und alle anderen Werte gleich lassen:

$$\vec{w} := \left(\frac{a_1 + a_k}{2}, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, \frac{a_1 + a_k}{2} \right)$$

Offensichtlich ist $\vec{w} \in X_a$, d.h. das arithmetische Mittel ist a, und es liegt dichter am Spezialfall, d.h. $d(\vec{w}) < d(\vec{v})$. Wir wissen aus $(*)$ in Teil b), dass $\sqrt{a_1 a_k} < \frac{a_1+a_k}{2}$ und folglich $a_1 a_k < \left(\frac{a_1+a_k}{2}\right)^2$. Damit ist aber $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} \cdot a_k < \frac{a_1+a_k}{2} \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} \cdot \frac{a_1+a_k}{2}$ und aus der Monotonie der k-ten Wurzelfunktion folgt $g(\vec{v}) < g(\vec{w})$.
Wenn nun $\vec{w}$ den Spezialfall repräsentiert, wären wir mit $g(\vec{v}) < g(\vec{w}) = a$ fertig. Anderenfalls findet man für $\vec{w}$ wieder ein neues Tupel $\vec{x}$ mit $g(\vec{w}) < g(\vec{x})$ und $d(\vec{x}) < d(\vec{w})$, d.h. man kann sich von $\vec{v}$ beginnend mit einer Folge von Tupeln aus X_a mit streng monoton wachsendem geometrischen Mittel beliebig dicht an den Spezialfall annähern. Folglich ist $g(\vec{v}) < g(\vec{w}) < \ldots \leq a$.