2. Übung Mathematik für Informatiker II SS 2013

Musterlösung Aufgabe 3: Obere Und Untere Grenzen Huy Le-Duc

Seien $C, D \subset \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Ferner sei $a > 0$ und C besitzt eine obere Grenze, dann besitzt auch $a \cdot (b + C)$ eine obere Grenze und es gilt:

$$\sup(a \cdot (b + C)) = a \cdot (b + \sup(C))$$

Beweis. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten.

- $b + C$ besitzt obere Schranke und es gilt: $\sup(b + C) = b + \sup(C)$
- $a \cdot C$ besitzt obere Schranke und es gilt: $\sup(a \cdot C) = a \cdot \sup(C)$

Es sei $c := \sup(C)$, da C beschränkt ist. Wir zeigen zuerst den ersten Teil. Wir betrachten ein beliebiges Element aus $b + C$. Es hat die Form $b + x$ wobei $x \in C$. Dann ist $x \leq c$ und es folgt $b + x \leq b + c$. Wir haben gezeigt, dass $b + C$ beschränkt ist.

Nun müssen wir noch zeigen, dass $b + c$ die kleinste obere Schranke ist. Dies zeigen wir indirekt. Angenommen es gibt eine kleinere obere Schranke d. Es gilt $d < b + c$. Wir definieren $\varepsilon := b + c - d > 0$. Ferner definieren wir

$$c' := c - \varepsilon$$

Wir wissen dann, dass c' keine obere Schranke von C ist. Also existiert ein $z \in C$ mit $z > c'$. Mit der Definition von c' erhalten wir:

$$\begin{array}{rccc} & z & > & c' \\ \Leftrightarrow & z & > & c - (b + c - d) \\ \Leftrightarrow & b + z & > & d \end{array}$$

Dies ist im Widerspruch zur Annahme das d eine obere Schranke von $b + C$ ist. Also gilt: $b + c = \sup(b + C)$

Nun zeigen wir den zweiten Teil - $a \cdot c$ ist das Supremum von $a \cdot C$. Es gilt $a \cdot x \in a \cdot C$. Wir haben $x \leq c$, dann folgt $a \cdot x \leq a \cdot c$. Wir haben gezeigt, dass $a \cdot C$ beschränkt ist.

Nun müssen wir noch zeigen, dass $a \cdot c$ die kleinste obere Schranke ist. Dies zeigen wir wie oben indirekt. Angenommen es gibt eine kleinere obere Schranke d. Es gilt $d < a \cdot c$. Wir definieren $\varepsilon := a \cdot c - d > 0$. Ferner definieren wir

$$c' := c - \frac{\varepsilon}{a}$$

Wir wissen dann, dass c' keine obere Schranke von C ist. Also existiert ein $z \in C$ mit $z > c'$. Mit der Definition von c' erhalten wir:

$$\begin{array}{rccc} & z & > & c' \\ \Leftrightarrow & z & > & c - \frac{\varepsilon}{a} \\ \Leftrightarrow & z & > & c - \frac{a \cdot c - d}{a} \\ \Leftrightarrow & a \cdot z & > & d \end{array}$$

Dies ist im Widerspruch zur Annahme das d eine obere Schranke von $a \cdot C$ ist. Also gilt: $a \cdot C = \sup(a \cdot C)$ $\square$