Mathematik für Informatiker II — SS 2013

Musterlösung zur 10. Übung, Aufgaben 2 und 3

Aufgabe 1 — **Extremstellen und Wendepunkte** — 4 **Punkte**

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema und alle Wendepunkte der Funktion $f(x) = 2e^{2x} - 4e^x$. Bestimmen Sie jeweils die Art der lokalen Extrema und Wendepunkte.

Aufgabe 2 — **Extremalprobleme** — 4 **Punkte**

Ein Schiff soll eine Ladung 120 km stromaufwärts transportieren, gegen eine Strömung von 10 km/h. Im strömungsfreien Wasser kann das Schiff bis zu 35 km/h fahren. Bei x km/h sind die Betriebskosten pro Stunde mit $k(x) = 30 + \frac{x^2}{10}$ Euro anzusetzen. Bestimmen Sie die optimale Geschwindigkeit zur Minimierung der Gesamtkosten.
Hinweis: Wenn man km als Längen- und h als Zeiteinheit festlegt, kann man die Rechnung auch ohne Maßeinheiten ausführen.

Lösung: Als erstes müssen wir die Funktion bestimmen, die die Kosten beschreibt welche wir dann minimieren wollen. Die Betriebskosten für das Schiff betragen

$$k(x) = 30 + \frac{x^2}{10}$$

Euro pro Stunde. Die tatzächliche Geschwindikeit des Schiffes beträgt $x - 10$ km pro Stunde und daraus resultiert für die 120 km eine Dauer von

$$h(x) = \frac{120}{x - 10}$$

Stunden. Um die Kosten für die Fahrt zu bestimmen multiplizieren wir die beiden Funktionen und erhalten

$$f(x) = k(x) \cdot h(x) = (30 + \frac{x^2}{10})\frac{120}{x - 10} = \frac{3600 + 12x^2}{x - 10}$$

Euro. Nun genügt es die Funktion $f(x)$ auf Extremstellen zu untersuchen. Dafür brauchen wir die ersten beiden Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{24x(x - 10) - (3600 + 12x^2)}{(x - 10)^2} = \frac{12x^2 - 240x - 3600}{(x - 10)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(12x - 240)(x - 10)^2 - (12x^2 - 240x - 3600)2(x - 10)}{(x - 10)^4} = \frac{9600}{(x - 10)^3}.$$

Kandidaten für Extremstellen sind die Nullstellen der ersten Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{12x^2 - 240x - 3600}{(x - 10)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 12x^2 - 240x - 3600 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_{1,2} = 10 \pm 20. \end{aligned}$$

Für die Geschwindigkeit kommt nur die zweite Lösung $x = 30$ als Extremstelle in Frage. Die zweite Ableitung liefert

$$f''(30) = \frac{9600}{(30-10)^3} > 0$$

und damit handelt es sich bei 30 km pro Stunde um ein Minimum für die Kosten um die 120 km zurückzulegen.

Aufgabe 3 **Mittelwertsatz** $2+1+3$ **Punkte**

Nutzen Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung um Folgendes zu zeigen:

a) Das Polynom $p(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 1$ hat keine Nullstellen in $\mathbb{R}^+$.

b) Das Polynom $q(x) = x^3 + 3x^2 + 6x - 1$ hat genau eine Nullstelle in $\mathbb{R}^+$.

c) Alle lokalen Extrema des Polynoms $r(x) = (x^2 - 5) \cdot (x^2 - 100) \cdot (x - 4) \cdot (x + 3)$ liegen im Intervall $(-10, 10)$. Hier ist eine genaue Begründung gefragt. Versuchen Sie nicht, die stationären Punkte direkt zu bestimmen, sondern argumentieren mit der maximal möglichen Anzahl solcher Punkte und den Nullstellen von $r(x)$.

Lösung: a) Die Ableitung des Polynoms

$$p'(x) = 3x^2 + 6x + 6$$

ist auf $\mathbb{R}^+$ echt größer Null und damit ist die Funktion $p(x)$ streng monoton wachsend auf dem Intervall. $p(0) = 1$ impliziert, dass es keine Nullstelle geben kann.

b) Die Funktion hat die gleiche Ableitung wie in a) und ist daher ebenfalls streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}^+$. $p(0) = -1$ und $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \infty$ impliziert, dass es genau eine Nullstelle gibt.

c) Die Funktion $r(x)$ hat Grad 6 uns besitzt die Nullstellen $N = \{\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 10, -10, 4, -3\}$ mit Vielfachheit eins, die alle im Intervall $[-10, 10]$ liegen. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung garantiert für jedes Paar von benachparten Nullstellen $a \neq b \in N$ ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0 - 0}{b - a} = 0.$$

Damit gibt es 5 mögliche Extremstellen, die genau zwischen den Nullstellen von $r(x)$ liegen, also in dem Intervall $(-10, 10)$. Da die Ableitung Grad 5 hat, kann es höchstens diese 5 Extremstellen geben.

Aufgabe 4 **Regel von Bernoulli-L'Hospital** $2+2+2$ **Punkte**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 5x}{\ln(1 + x^2)}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x^3} - e^x}{x \ln x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)$