Kapitel 5

Integralrechnung

5.1 Stammfunktionen

Definition: Eine auf dem Intervall I differenzierbare Funktion F ist eine Stammfunktion der Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

Fakt 1: Sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f, dann gilt $F_1(x) = F_2(x) + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und alle $x \in I$.

Definition: Die Menge aller Stammfunktionen von f wird das unbestimmte Integral von f genannt und mit $\int f(x)dx = F(x) + c$ bezeichnet.

Während wir Fakt 1 bereits als Folgerung aus dem Mitterlwertsatz der Differentialrechnung kennen, wird der folgende Fakt 2 erst später als Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bewiesen.

Fakt 2: Jede über einem offenen Intervall stetige Funktion f besitzt eine Stammfunktion, d.h. das unbestimmte Integral $\int f(x)dx$ existiert.

Die Bestimmung einer Stammfunktion $F(x)$ einer gebenen Funktion $f(x)$ nennt man Integration. Im Gegensatz zum Differenzieren, das sich in den meisten Fällen mit relativ einfachen Grundregeln durchführen lässt, ist das Integrieren häufig eine sehr komplizierte Aufgabe, zu deren Lösung ein Vorrat an Grundintegralen notwendig ist. Die Grundintegrale aus der folgenden Tabelle kennt man von den Ableitungen verschiedener Standardfunktionen.

$f(x) = x^\alpha$	$(\alpha \neq -1)$	$\displaystyle\int x^\alpha \; dx$	$= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$(x \neq 0)$	$\displaystyle\int \frac{1}{x} \; dx$	$= \ln\lvert x\rvert + c$
$f(x) = e^x$		$\displaystyle\int e^x \; dx$	$= e^x + c$
$f(x) = \sin x$		$\displaystyle\int \sin x \; dx$	$= -\cos x + c$
$f(x) = \cos x$		$\displaystyle\int \cos x \; dx$	$= \sin x + c$

$$
\begin{array}{llll}
f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} & & \displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx & = \tan x + c \\[2ex]
f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} & & \displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\ dx & = -\cot x + c \\[2ex]
f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & & \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx & = \arcsin x + c \\[2ex]
f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} & & \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\ dx & = \arctan x + c \\[2ex]
f(x) = \dfrac{1}{1-x^2} & (|x| < 1) & \displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\ dx & = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{1+x}{1-x} + c \qquad (*) \\[2ex]
f(x) = \sinh x & & \displaystyle\int \sinh x\ dx & = \cosh x + c \\[2ex]
f(x) = \cosh x & & \displaystyle\int \cosh x\ dx & = \sinh x + c \\[2ex]
f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & & \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ dx & = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \text{arsinh}\ x + c \\[2ex]
f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} & (|x| > 1) & \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ dx & = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| = \text{arcosh}\ x + c
\end{array}
$$

Das mit $(*)$ gekennzeichnete Grundintegral wurde bisher noch nicht behandelt, kann aber durch Ableiten der Stammfunktion leicht überprüft werden.

5.2 Integrationsregeln

Die meisten Integrationsmethoden, die in dieser Vorlesung behandelt werden, ergeben sich durch die Umkehrung der bekannten Differentiationsregeln.

Linearität des Integrals

Satz: Für beliebige (über einem Intervall I) integrierbare Funktionen f und g und Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int (a \cdot f(x) + b \cdot g(x))\ dx = a \cdot \int f(x)\ dx + b \cdot \int g(x)\ dx$$

Partielle Integration

Diese Integrationsmethode basiert auf der Umkehrung der Produktregel der Differentiation:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f'(x) \cdot g(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f(x) \cdot g'(x)$$

Durch Integration auf beiden Seiten der rechten Gleichung erhält man die folgende Regel.

Satz: Für beliebige (über einem Intervall I) differenzierbare Funktionen u und v gilt

$$\int u'(x) \cdot v(x)\ dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\ dx$$

Beispiele:

1) $$\underbrace{\int x e^x \; dx}_{u'(x)=e^x,\; v(x)=x} = xe^x - \int e^x \; dx = xe^x - e^x + c = (x-1)e^x + c$$

2) $$\underbrace{\int x^2 \sin x \; dx}_{u'(x)=\sin x,\; v(x)=x^2} = -x^2 \cos x + \underbrace{\int 2x \cos x \; dx}_{u'(x)=\cos x, v(x)=2x}$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x \; dx = (2 - x^2)\cos x + 2x \sin x + c$$

3) Mit dem Ansatz $u'(x) = 1$, $u(x) = x$ kann man als Spezialfall der partiellen Integration die folgende Regel aufstellen: $\int v(x) \; dx = x \cdot v(x) - \int x \cdot v'(x) \; dx$. Insbesondere hilft dieser Ansatz bei den folgenden Integralen:

$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int \frac{x}{x} \, dx = x \cdot \ln x - x + c$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

4) $$\underbrace{\int \sin^2 x \; dx}_{u'(x)=\sin x,\; v(x)=\sin x} = -\cos x \sin x + \int \underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x} \; dx = -\cos x \sin x + \int \; dx - \int \sin^2 x \, dx$$

$$\Longrightarrow \int \sin^2 x \; dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \; \sin x) + c$$

Substitutionsmethode

Integration mit Substitution geht auf die Umkehrung der Kettenregel zurück:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \int f'(g(x))g'(x) \; dx = f(g(x)) \qquad \Longrightarrow$$

$$\int f(g(x))g'(x) \; dx = F(g(x)) + c \qquad \text{wobei } F(x) \text{ eine Stammfunktion von } f(x) \text{ ist.}$$

Die Substitutionsmethode wird in zwei verschiedenen Versionen verwendet, einer direkten Anwendung der obigen Formel und einer Version, bei der Umkehrfunktionen angewendet werden. Beide Versionen werden hier durch eine Abfolge formaler Schritte zur Berechnung einer Stammfunktion beschrieben.

1. Version: Direkte Berechnung von $\int f(g(x))g'(x) \; dx$.

1. Schritt: Substitution $g(x) = t$ und $g'(x) \; dx = dt$.

2. Schritt: Berechnung einer Stammfunktion $\int f(t) \; dt = F(t) + c$.

3. Schritt: Rücksubstitution $t = g(x)$ und $F(t) = F(g(x))$

$$\int f(g(x))g'(x) \; dx = \int f(t) \; dt = F(t) + c = F(g(x)) + c$$

Beispiele:

1) $$\int \frac{g'(x)}{g(x)} \, dx = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln |g(t)| + c \qquad (g(x) \text{ differenzierbar und } g(x) \neq 0)$$

2) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3}+c = \frac{(\ln x)^3}{3}+c$

3) $\displaystyle\int e^{\sin x}\cdot\cos x\,dx = \int e^t\,dt = e^t+c = e^{\sin x}+c$

2. Version: Berechnung von $\int f(x)\,dx$ mit einer umkehrbaren Funktion $g(x)$.

1. Schritt: Substitution $x = g(t)$ und $dx = g'(x)\,dt$.

2. Schritt: Berechnung einer Stammfunktion $\int f(g(t))g'(t)\,dt = H(t) + c$.

3. Schritt: Auflösung von $x = g(t)$ durch die Umkehrfunktion h von g, d.h. $t = h(x)$

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt = H(t) + c = H(h(x)) + c$$

Beispiel: Berechnung von $F(x) = \displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ mit der Substitution $x = \sin t$ und $dx = \cos t\,dt$.

i) $F(\sin t) = \displaystyle\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt$

ii) $\displaystyle\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}(t + \sin t\cdot\cos t) + c$ mit partieller Integration.

iii) $F(x) = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\cdot\cos(\arcsin x)) + c = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\cdot\sqrt{1-x^2}\right) + c$

Integration mit Partialbruchzerlegung

Mit dem sogenannten Partialbruchansatz können alle rationalen Funktionen integriert werden. Man setzt dabei voraus, dass die zu integrierende Funktion $f(x)$ eine echt gebrochen rationale Funktion in gekürzter Darstellung ist:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ wobei } p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ mit } ggT(p(x), q(x)) = 1 \text{ und } \mathrm{Grad}(p(x)) < \mathrm{Grad}(q(x)).$$

Außerdem setzen wir voraus, dass alle reellen Nullstellen $b_1, \dots b_r$ und alle komplexen Nullstellen $z_1, \overline{z_1}, \dots, z_s, \overline{z_s}$ des Polynoms $q(x)$ bekannt sind:

$$\begin{aligned} q(x) &= c\cdot(x-b_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-b_r)^{k_r}\cdot[\underbrace{(x-z_1)(x-\overline{z_1})}_{=q_1(x)}]^{l_1}\cdot[\underbrace{(x-z_s)(x-\overline{z_s})}_{=q_s(x)}]^{l_s} \\ &= c\cdot\prod_{i=1}^{r}(x-b_i)^{k_i}\cdot\prod_{j=1}^{s}[q_j(x)]^{l_j} \end{aligned}$$

Der Partialbruchansatz stellt die rationale Funktion $f(x)$ als eine Summe spezieller Summanden dar:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{A_{i,1}}{(x-b_i)^1} + \ldots + \frac{A_{i,k_i}}{(x-b_i)^{k_i}}\right) + \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{B_{j,1}x + C_{j,1}}{(q_j(x))^1} + \ldots + \frac{B_{j,l_j}x + C_{j,l_j}}{(q_j(x))^{l_j}}\right)$$

Man kann zeigen (wir verzichten hier auf den Beweis), dass es für die Unbekannten $A_{i,k}, B_{j,l}$ und $C_{j,l}$ eindeutige relle Werte gibt, so dass die obige Gleichung erfüllt ist. Man erhält diese Werte indem zuerst beide Seiten der Gleichung mit dem Polynom $p(x)$ multipliziert werden.

Nach Kürzen auf der rechten Seite entsteht eine Polynomgleichung. Durch Koeffizientenvergleich dieser Polynome erhält man ein lineares Gleichungssystem, das eine eindeutige Lösung hat.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3+3x+1}{x^4-2x^3+x^2} = \frac{x^3+3x+1}{x^2\cdot(x-1)^2} = \frac{A_{1,1}}{x} + \frac{A_{1,2}}{x^2} + \frac{A_{2,1}}{x-1} + \frac{A_{2,2}}{(x-1)^2}$$

Nach Multiplikation mit $q(x)$ erhält man die folgende Polynomgleichung:

$$x^3+0x^2+3x+1 = A_{1,1}\cdot x\cdot(x-1)^2 + A_{1,2}\cdot(x-1)^2 + A_{2,1}\cdot x^2\cdot(x-1) + A_{2,2}\cdot x^2$$

Durch Koeffizientenvergleich entsteht ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrr} 1 = & A_{1,1} & & +A_{2,1} & \\ 0 = & -2A_{1,1} & +A_{1,2} & -A_{2,1} & +A_{2,2} \\ 3 = & A_{1,1} & -2A_{1,2} & & \\ 1 = & & A_{1,2} & & \end{array}$$

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems lässt sich leicht bestimmen:

$$A_{1,1} = 5, \qquad A_{1,2} = 1, \qquad A_{2,1} = -4, \qquad A_{2,2} = 5,$$

Da das Nennerpolynom $q(x)$ nur reelle Nullstellen hatte, kann man die rationale Funktion $f(x)$ nach Auswertung des Partialbruchansatzes relativ leicht integrieren:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+3x+1}{x^4-2x^3+x^2}\,dx &= 5\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dx}{x^2} - 4\int\frac{dx}{x-1} + 5\int\frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= 5\ln|x| - \frac{1}{x} - 4\ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + c \end{aligned}$$

Wenn das Nennerpolynom auch nichtreelle Nullstellen hat, wird die Integration der zugehörigen Summanden aus der Partialbruchzerlegung wesentlich komplizierter, aber durch Verwendung geeigneter Substitutionen können prinzipiell alle auftretenden Partialbrüche integriert werden.

5.3 Das bestimmte Integral

Das bestimmte Integral einer stetigen Funktion f üeber einem Intervall $[a, b]$ wurde von Bernhard Riemann eingeführt und wird deshalb auch Riemannsches Integral genannt. Der Zusammenhang zum unbestimmten Integral ist auf den ersten Blick nicht offensichtlich, sondern wird erst durch den Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung deutlich.

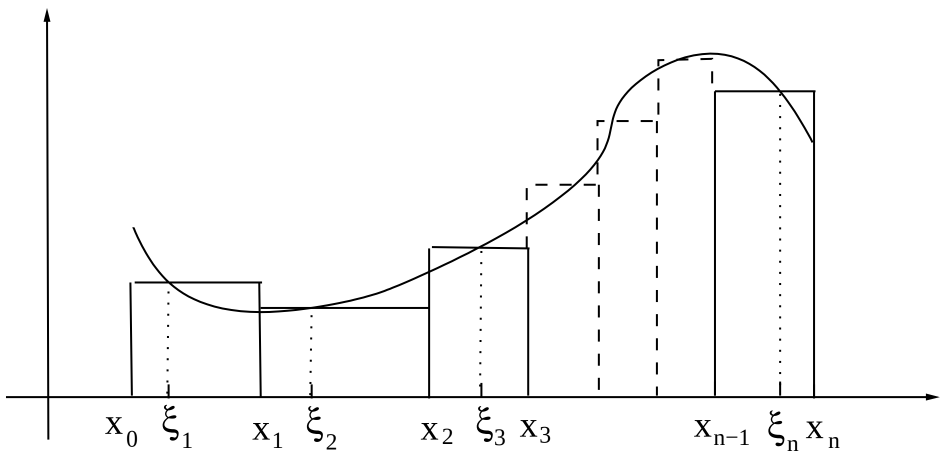
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion. Wir betrachten eine Zerlegung des Intervalls in n Teilintervalle durch das Einfügen von $n-1$ Teilungspunkten, die zusammen mit den Intervallgrenzen eine streng monoton steigende endliche Folge bilden:

$$a = x_0 < \underbrace{x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}}_{\text{Teilungspunkte}} < x_n = b$$

Wird darüber hinaus für jedes Teilintervall ein Zwischenpunkt $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ausgewählt, kann man darauf basierend die sogennate Zwischensumme oder Riemannsche Summe bilden:

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Die folgende Abbildung zeigt, dass die Zwischensumme für Funktionen mit positiven Werten eine Approximation der Fläche zwischen Funktionsgraph und der x–Achse repräsentiert.



Satz und Definition: Für jede Folge von sich schrittweise verfeinernden Unterteilungen des Intervalls $[a, b]$ mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass die Länge des größten Teilintervalls eine Nullfolge ist und für eine beliebige Auswahl der Zwischenpunkte bei jeder Unterteilung konvergiert die zugehörige Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen eindeutigen Wert, den man das bestimmte Integral von f über dem Intervall $[a, b]$ nennt und mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Beweis: Wir betrachten aus jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ zwei spezielle Zwischenwerte in denen f den mimimalen bzw. maximalen Wert auf $[x_{i-1}, x_i]$ annimmt und bezeichen mit m_i bzw. M_i diese minimalen bzw. maximalen Werte von f auf $[x_{i-1}, x_i]$. Damit ergeben sich zwei spezielle Zwischensummen, nämlich die Untersumme $s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ und die Obersumme $S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$. Bezeichnet man mit m und M das globale Minimum und das globale Maximum von f auf dem Gesamtintervall $[a, b]$, so ergibt sich die folgende Ungleichungskette

$$m(b - a) \leq s_n \leq Z_n \leq S_n \leq M(b - a)$$

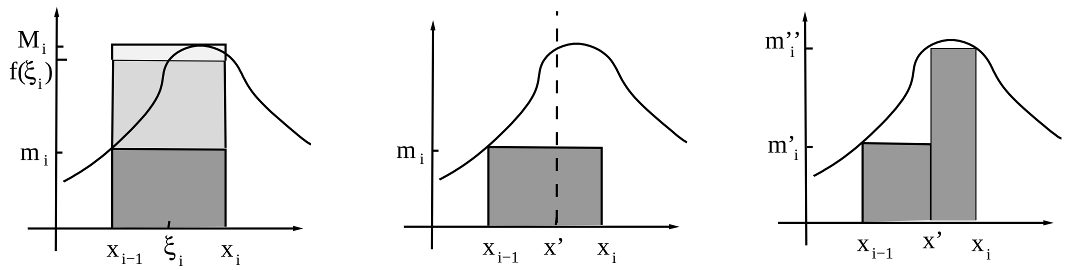
Die Konvergenz der Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen eindeutigen Wert ergibt sich aus der folgenden Schlusskette:

1. Die Folge der Untersummen ist monoton wachsend und die Folge der Obersummen ist monoton fallend, d.h. beide Folgen konvergieren nach Monotoniekriterium.

2. Wir zeigen, dass die Differenzenfolge $(S_n - s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Damit konvergieren $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Wert und nach Vergleichskriterium konvergiert dann auch $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Wert.

3. Der Grenzwert, gegen den $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, hängt nicht von der zu Grunde liegenden Unterteilungsfolge ab, sofern diese Unterteilungsfolge die Eigenschaft hat, dass die Länge des größten Teilintervalls eine Nullfolge ist.

ad 1) Die Voraussetzung über die schrittweise Verfeinerung der Unterteilungen bedeutet, dass die $(n+1)$–te Unterteilung aus der n–ten Unterteilung hervorgeht durch Einführung eines zusätzlichen Unterteilungspunktes x' in einem der Intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ der n–ten Unterteilung. Die Abbildung zeigt, dass unter dieser Voraussetzung die Folge der Untersummen monoton wachsend und die Folge der Obersummen monoton fallend sein muss. Formal sei m_i das Minimum von f auf dem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ und m'_i bzw. m''_i die Minima von f auf den Teilintervallen $[x_{i-1}, x']$ bzw. $[x', x_i]$. Die folgende Abbildung zeigt links den Beitrag eines Teilintervalls zu Untersumme (dunkelgrau), Zwischensumme (dunkel- und mittelgrau) und zur Obersumme (Gesamtrechteck). In der Mitte und rechts ist der Beitrag eines Teilintervalls zur Untersumme und der Beitrag des gleichen Abschnitts nach der Verfeinerung der Unterteilung durch einen zusätzlichen Unterteilungspunkt x' zu sehen.



Offensichtlich ist $m'_i \geq m_i$ und $m''_i \geq m_i$ und da sich die Untersummen s_n und s_{n+1} nur auf diesem Teil unterscheiden, gilt

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= m'_i \cdot (x' - x_{i-1}) + m''_i \cdot (x_i - x') - m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &\geq m_i \cdot (x' - x_{i-1}) + m_i \cdot (x_i - x') - m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= m_i \cdot (x' - x_{i-1} + x_i - x' - (x_i - x_{i-1})) = 0 \end{aligned}$$

und damit ist $s_{n+1} \geq s_n$. Für die Obersumme argumentiert man analog.

ad 2) Sei ein $\epsilon > 0$ gegeben und bezeichne ϵ' den Wert $\frac{\epsilon}{b-a}$. Für die n–te Unterteilung bezeichen wir mit $\alpha_n = max\{M_i - m_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ und stellen fest, dass auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf $[a,b]$ die Ungleichung $\alpha_n < \epsilon'$ immer dann erfüllt ist, wenn die maximale Länge der Teilintervalle kleiner als das zu ϵ' passende δ aus der Stetigkeitsdefinition ist. Somit erhalten wir

$$0 \leq S_n - s_n = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_n \cdot (x_i - x_{i-1}) = \alpha_n \cdot (b-a) < \epsilon' \cdot (b-a) = \epsilon$$

für ausreichend große n.

ad 3) Wir betrachten zwei Unterteilungsfolgen mit der Eigenschaft, dass die Größe des längsten Teilintervalls gegen Null geht und bezeichnen die entsprechenden Folgen der Untersummen mit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Um nachzuweisen, dass die Grenzwerte $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ und $s' = \lim_{n\to\infty} s'_n$ gleich sind, zeigen wir, dass für jedes $\epsilon > 0$ die Differenz $|s - s'|$ kleiner als ϵ ist. Offensichtlich gibt es Indizes n_1 und n_2 mit $|s_{n_1} - s| < \epsilon/2$ und $|s_{n'_2} - s'| < \epsilon/2$. Jetzt betrachten wir eine Unterteilung, die alle Unterteilungspunkte der n_1-ten Unterteilung der ersten Folge und der n_2-ten Unterteilung der zweiten Folge enthält. Sie ist also eine Verfeinerung beider Unterteilungen und nach der Monotonoieeigenschaft kann ihre Untersumme u

nicht weiter von s bzw. von s' entfernt sein, als s_{n_1} bzw. s'_{n_2}. Daraus folgt

$$|s - s'| = |s - u + u - s'| \leq |s - u| + |u - s'| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Somit konvergieren alle Folgen der Zwischensummen gegen den gleichen Grenzwert, sofern die zugrunde liegenden Unterteilungsfolgen die Eigenschaft haben, dass die Länge des längsten Teilintervalls gegen Null geht.

Anmerkung: Die gerade besprochene Konstruktion des bestimmten Integral kann auch auf alle Situationen übertragen werden, in denen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ beschränkte und stückweise stetige Funktion mit einer endlichen Anzahl von Unstetigkeitsstellen ist.

5.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einigen einfachen Beobachtungen. Die folgenden Eigenschaften ergeben sich unmittelbar aus der Definition des bestimmten Integrals.

Integrationsregeln: Für zwei beliebige auf einem Intervall $[a, b]$ beschränkte und stückweise stetige Funktionen f, g, beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sowie ein beliebiges $c \in [a, b]$ gilt:

1. $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$

2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

3. Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann folgt $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$.

Aus formalen Gründen kann man die Voraussetzung $a \leq b$ für die Intergationsgrenzen aufheben, indem man im Fall $a > b$ das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ durch $\int_a^b f(x)\, dx := -\int_b^a f(x)\, dx$ definiert. Die zweite Regel gilt dann auch für beliebige Kostellationen von a, b und c.

Folgerung 1: Ist eine Funktion f beschränkt und stückweise stetig auf einem Intervall $[a, b]$ und ist m der minimale und M der maximale Funktionswert von f auf dem Intervall, so gilt

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b - a)$$

Folgerung 2: Ist eine Funktion f beschränkt und stückweise stetig auf einem Intervall $[a, b]$, dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Die erste Folgerung kann unmittelbar aus der Ungleichung $m \leq f(x) \leq M$ über $[a, b]$ abgeleitet werden, wobei m und M hier als konstante Funktionen aufgefasst werden.
Für die zweite Folgerung überträgt man die bekannte Ungleichung $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ auf die Integrale und erhält die Behauptung wieder aus der Betragsungleichung:

$$-\int_a^b |f(x)|\, dx = \int_a^b -|f(x)|\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung): Sind f und g stetige Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$ und ist $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$, so dass

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Beweis: Sei m der minimale und M der maximale Funktionswert von f auf $[a, b]$, dann gilt für alle $x \in [a, b]$ die Ungleichung $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, denn $g(x) \geq 0$. Das überträgt sich auf die Integrale:

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx$$

Damit ist $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = c\int_a^b g(x)\,dx$ für einen Wert c aus dem Intervall $[m, M]$ und aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen wissen wir, dass der Wert c von der Funktion f an (mindestens) einer Stelle $\xi \in [a, b]$ angenommen wird. □

Damit sind die Vorbereitungen abgeschlossen, um den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (auch als Fundamentalsatz der Analysis bekannt) zu beweisen. Er erklärt den inneren Zusammenhang der beiden grundlegenden Konzepte der Analysis, nämlich der Differentiation und des bestimmten Intergrals und zeigt auf, in welcher Weise das eine die Umkehrung des anderen ist. Zwischen Ableitung und unbestimmten Integral (Stammfunktion) wurde diese Umkehreigenschaft schon per Definition hergestellt, hier geht es also letzlich um eine Erklärung, wie bestimmtes und unbestimmtes Integral zusammenhängen. Dieser Fundamentalsatz wurde unanbhängig von Newton und Leibniz entdeckt (es kam zu einem erbitterten Urheberstreit). In der heute üblichen Notation wurde der Satz erstmalig von Cauchy formuliert.

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung): Sei f eine auf einem offenen Intervall I stetige Funktion und $a \leq b$ zwei Werte aus I, dann gilt:

1. Die Funktion $F_a(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von f auf I, d.h.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \qquad \text{für alle } x \in I.$$

2. Für eine beliebige Stammfunktion F von f ist und den Ausdruck $F(x)\big|_a^b := F(b) - F(a)$ gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b$$

.

Beweis: Wir untersuchen zuerst den Zähler des Differenzenquotienten für die Funktion F_a:

$$\begin{aligned} F_a(x+h) - F_a(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\underbrace{\cdot 1}_{=g(t)}\,dt \\ &= f(\xi_h)\cdot h \qquad\qquad \text{für ein } \xi_h \in [x, x+h] \end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung und nutzt einen trivialen Fakt über das Integrieren von konstanten Funktionen, nämlich $\int_x^{x+h} 1\,dt = h \cdot 1 = h$. Man beachte, dass mit $h \to 0$ der Zwischenwert $\xi_h \in [x, x+h]$ gegen x gehen muss. Jetzt können wir die Ableitung von F_a im Punkt x bilden:

$$F_a'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi_h) \cdot h}{h} = \lim_{h \to 0} f(\xi_h) = f(x).$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Steigkeit von f. Damit ist der erste Teil des Fundamentalsatzes bewiesen. Zum Beweis des zweiten Teils verwendet man den Fakt, dass sich zwei Stammfunktionen von f nur durch einen konstanten additiven Term unterscheiden. Ist also F eine Stammfunktion von f dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $F(x) = F_a(x) + c$ für alle $x \in I$, insbesondere auch für $x = a$ und $x = b$. Daraus folgt $F(a) = 0 + c = c$ und $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt + c = \int_a^b f(t)\,dt + F(b)$ und durch Umstellen dieser Gleichung $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ □

Durch den Satz ergibt sich die folgende Möglichkeit zur Berechnung eines bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ (bisher war das bestimmte Integral nur ein schwer handhabbarer Grenzwert, den man nur in Ausnahmefällen, wie z.B. für konstante und lineare Funktionen, einfach berechnen konnte):

1. Bestimmung einer Stammfunktion F von f
2. Auswertung von F an den Stellen a und b: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Bei Verwendung der Substitution $x = g(t)$ zur Bestimmung der Stammfunktion (Schritt 1) gibt es zwei Varianten für die Berechnung des bestimmten Integrals.
Variante 1: Man führt wie üblich die Rücksubstitution aus und verwendet danach die gegebenen Integrationsgrenzen a und b.
Variante 2: Man verzichtet auf die Rücksubstitution und substituiert dafür die Integrationsgrenzen nach folgendem Schema:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t))\Big|_\alpha^\beta = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$$

wobei α, β mit $g(\alpha) = a$ und $g(\beta) = b$ zu wählen sind.

Beispiel: Wir berechnen das Intgral $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2}$ mit der Substitution $x = \tan t$ und $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$. Die Integrationsgrenzen werden folglich mit $\alpha = 0$ und $\beta = \frac{\pi}{4}$ substituiert und wir erhalten:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2 t \left(1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\ dt = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

Uneigentliche Integrale

Definition: Sei $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine stückweise stetige Funktion (d.h. es gibt nur endlich viele Stellen, an denen f nicht stetig ist) und sei f für beliebige $c < b$ beschränkt auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, c]$. Wenn dann der Grenzwert

$$\lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)\,dx \qquad \text{bzw. bei } b = \infty \text{ der Grenzwert} \qquad \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\,dx$$

existiert, dann nennt man ihn das *uneigentliche Integral* der Funktion f von a nach b und bezeichnet ihn mit $\int_a^b f(x)\,dx$ bzw. $\int_a^\infty f(x)\,dx$. Analog kann für $f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ das uneigentliche Integal wie folgt definiert werden:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)\,dx \qquad \text{bzw.} \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)\,dx.$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{c\to\infty} \frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{c^{\alpha-1}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{falls } \alpha > 1 \\ \infty & \text{falls } \alpha < 1 \end{cases} \\
\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{c\to 0+} \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{c^{\alpha-1}}-1\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{falls } \alpha < 1 \\ \infty & \text{falls } \alpha > 1 \end{cases} \\
\int_1^\infty \frac{dx}{x} &= \lim_{c\to\infty} \ln c - \ln 1 = \infty \qquad \text{(Divergenz)} \\
\int_0^1 \frac{dx}{x} &= \lim_{c\to 0+} \ln 1 - \ln c = \infty \qquad \text{(Divergenz)}
\end{aligned}$$

5.5 Anwendungen der Integralrechnung

Die Intgralrechnung hat vielfältige Anwendungen. Einige von ihnen sind unmittelbar mit der Definition des bestimmten Integrals verbunden (Flächeberechnungen zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse oder zwischen zwei Funktionsgraphen), weitere könnte man als nahe Verwandte der Erstgenannten einstufen (z.B. Volumen und Oberfäche von Rotationskörpern), bei anderen ist der Bezug zu einem Riemann-Integral weniger offensichtlich (z.B. Längenbestimmung von parametrisierten Kurven oder spezielle Sektorflächen).

Flächenberechnungen

Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ eine stetige Funktion, dann beschreibt das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ die Fläche zwischen Funktionsgraphen und x-Achse, genauer gesagt, die Fläche, die vom Funktionsgraphen, den Loten von den Punkten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ auf die x-Achse und dem Abschnitt $[a,b]$ auf der x-Achse eingeschlossen wird. Diese Eigenschaft geht verloren, wenn die Funktion f auch negative Werte annimmt. In diesem Fall müsste man das Integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$ für die Fläche verwenden, aber das macht die Bestimmung einer durchgehenden Stammfunktion komplizierter. Wenn bereits eine Stammfunktion F von f bekannt ist, verfährt man in diesem allgemeinen Fall wie folgt:

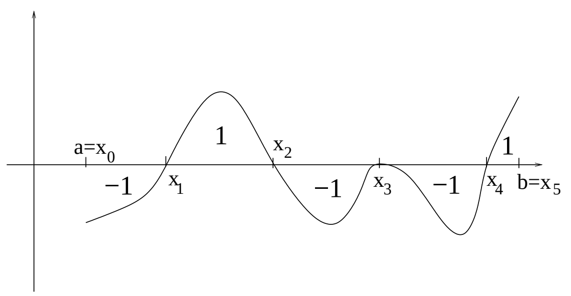
1. Bestimmung aller Nullstellen von f im Bereich $[a,b]$. Seien das (aufsteigend geordnet) die Werte $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ und setze zusätzlich $x_0 = a$ und $x_{k+1} = b$.

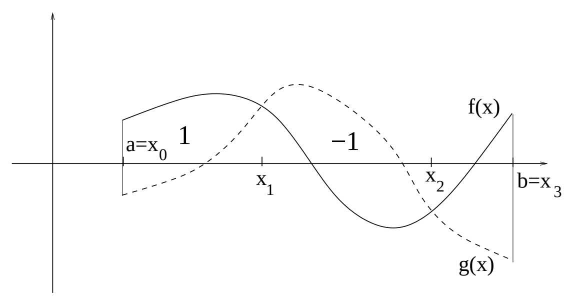
2. Bestimme für jedes Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ das Vorzeichen $s_i \in \{-1, 1\}$, das angibt, ob f im Inneren dieses Bereichs negative oder positive Werte annimmt. Wenn das erste oder letzte Teilintervall die Länge 0 hat (wegen $x_1 = a$ oder $x_k = b$) ist das entsprechende Vorzeichen egal, d.h. man kann es auf 1 setzen.

3. Die gesuchte Fläche A wird berechnet durch

$$A = \sum_{i=0}^{k} s_i(F(x_{i+1}) - F(x_i))$$

Die folgende Abbildung illustriert diese Vorgehensweise auf der linken Seite. Auf der rechen Seite wird die Methode auf die Fläche zwischen den Graphen von zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ (mit den Stammfunktionen $F(x)$ und $G(x)$ übertragen. Hier übernimmt die Funktion $h(x) = f(x) - g(x)$ die Rolle von $f(x)$ aus der ersten Anwendung. Folglich muss man zuerst alle Stellen $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ finden, an denen $f(x) = g(x)$ gilt und die Vorzeichen s_i danach festlegen, ob $f(x) < g(x)$ oder $f(x) > g(x)$ für alle $x \in (x_i, x_{i+1})$.





Um weitere Anwendungen mit einem einheitlichen Ansatz angehen zu können, führen wir eine neue Terminologie ein, in der sogenannte Elemente eine zentrale Rolle spielen. Wir gehen davon aus, dass eine reelle Größe G durch ein Riemannsches Integral berechnet werden kann. Dieses Integral ist der Grenzwert von Riemannschen Summen, wobei jeder Summand die Form $f(x)\Delta x$ hat. Für den Grenzwert wird die Anzahl der Summanden beliebig groß, aber alle einzelnen Summanden beliebig klein (vom Betrag). Symbolisiert wird dieser Grenzübergang dadurch, dass man das Summenzeichen durch das Intgralzeichen und Δx durch dx ersetzt: $G = \int_a^b f(x)\, dx$. Der Ausdruck $f(x)\, dx$, der im Grenzübergang $\Delta x \to 0$ die Rolle von $f(x)\Delta x$ übernimmt, wird das Element dG genannt. Somit besteht die erste Aufgabe zu Berechnung von G in einer geeigneten Beschreibung von dG, der zweite Schritt in der Bestimmung des unbestimmten Integrals (Stammfunktion) und der letzte Schritt in der Auswertung dieser Stammfunktion an den Intervallgrenzen a und b.

Die Länge des Graphen einer Funktion

Der Graph einer Funktion f über einem Intervall $[a, b]$ ist eine spezielle Kurve, die für jedes $x_0 \in [a, b]$ nur ein Punkt mit dieser x-Koordinate entält. Ein allgemeinerer Fall (z.B. zur Längenbestimmung von Spiralen) wird später mit parametrisierten Kurven behandelt. In einer Riemannsumme zur Approximation der Kurvenlänge würde man für ein Teilintervall $[x, x + \Delta x]$ den Abschnitt des Graphen vom Punkt $(x, f(x))$ zum Punkt $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ durch die Strecke zwischen diesen beiden Punkten approximieren. Diese hat die Länge

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (f(x + \Delta x) - f(x))^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)^2}$$

Das Herausziehen von Δx hat vor in erster Linie den Grund, bei der Elementbeschreibung mit $\Delta x \to 0$ von Δx auf dx zu kommen, aber in diesem Fall bringt es den zusätzlichen Vorteil, dass der Ausdruck unter der Wurzel gegen $1 + (f'(x))^2$ konvergiert. Somit erhält man das Längenelement $dL = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$ und letztlich die folgende Formel zur Längenberechnung des Funktionsgraphen:

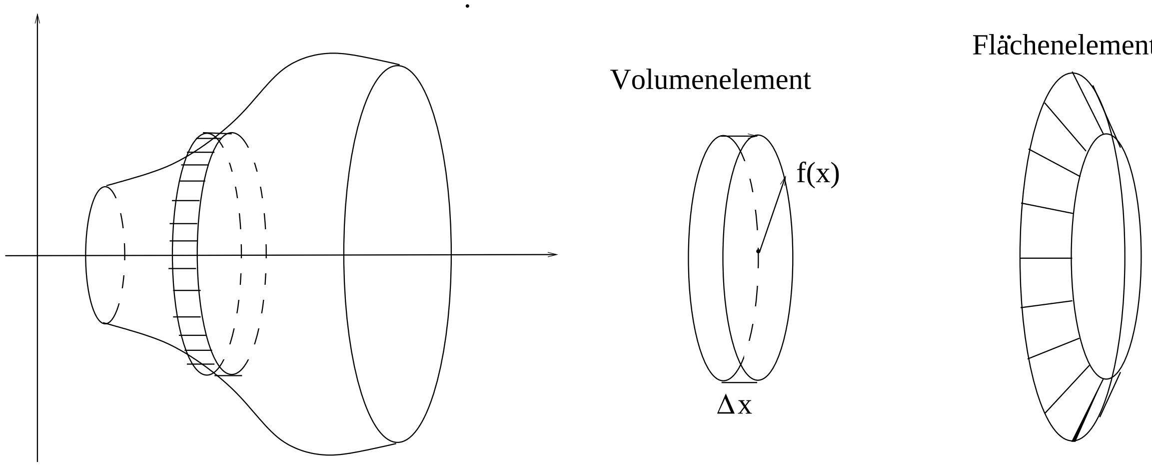
$$L = \int_a^b dL = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Volumen und Mantelfäche von Rotationskörpern

Rotiert man den Graph einer Funktion f über einem Intervall $[a, b]$ um die x-Achse, so entsteht ein sogenannter Rotationskörper, dessen Volumen V man in enger Analogie zur Flächenbestimmung zwischen Graph und x-Achse berechnen kann. Man muss sich dazu nur klar machen, dass die Rechtecke bei der Flächenbestimmung nun durch das Volumen von (auf den Rand gestellten) Zylinderscheiben mit Radius $f(x)$ und Scheibendicke Δx ersetzt werden müssen. Mit $\Delta x \to 0$ ergibt sich ein Volumenelement der Form $dV = \pi(f(x))^2 dx$.

Naiv gesehen könnte man zu der Annahme kommen, dass sich auch die Mantelfläche des Rotationskörpers durch Summation der Mantelfächen der Zylinderscheiben ausreichend genau approximiert werden kann. Damit würde das Mantelfächenelement die Form $dM = 2\pi f(x)\,dx$ annehmen (dabei ist $2\pi f(x)$ ist der Umfang der Zylinderscheibe und Δx die Dicke). Das ist aber falsch, denn insbesondere in Abschnitten mit einem starken Anstieg von f (in der Abbildung rechts) ist die Mantelfläche des Rotationskörpers wesentlich größer. Eine genauere Betrachtung zeigt, dass dafür die Mantelfläche eines Kegelstumpfes wesentlich besser geeignet ist und diese kann wiederum ausreichend genau approximiert werden durch die Mantelfläche eines Zylinders mit Durchmesser $f(x)$ und einer Höhe (Scheibendicke), die durch die Länge des Kurvenabschnitts gegeben ist. Somit kommt man zu einem Mantelflächenelement der Form $dM = 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ und zusammenfassend zu den folgenden Volumen- und Flächenformeln:

$$V = \int_a^b dL = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \quad \text{und} \quad M = \int_a^b dM = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}$$



Die letztgenannten Anwendungen kann man an der Berechnung des Volumens und der Oberfäche einer Kugel mit Radius r demonstrieren. Eine solche Kugel entsteht als Rotationskörper des durch $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ beschriebenen Halbkreises über dem Intervall $[-r, r]$.

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (f(x))^2\,dx = \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2\,dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-r}^{r} = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4\pi}{3}$$

Für die Mantelfläche vereinfacht man zuerst das Mantelflächenelement dM:

$$\begin{aligned} dM &= 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = 2\pi\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx \\ &= 2\pi\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}}\,dx = 2\pi r\,dx \end{aligned}$$

und kommt so leicht auf

$$M = \int_{-r}^{r} dM = \int_{-r}^{r} 2\pi r\,dx = 2\pi r\ x|_{-r}^{r} = 2\pi r(r+r) = 4\pi r^2.$$

Hier endet leider die aktuelle Version des Skripts. Die weiteren Themen muss man entweder mitschreiben oder in einem Buch nachlesen:

- **Anwendungen der Integralrechnung zur Längenbestimmung parametrisierten Kurven**
- **Potenzreihen**
- **Taylor–Formel und Reihenentwicklung für einige Standardfunktionen**