Mathematik für Informatiker II

Klaus Kriegel

Vorlesung an der FU Berlin im Sommersemester 2013

Vorwort

Die Vorlesung Mathematik für Informatiker II ist eine grundlegende Einführung in die Differential- und Integralrechnung mit besonderer Betonung der Anwendungen und der algorithmischen Aspekte dieser Theorie. Die folgende Themen bilden die Schwerpunkte der Vorlesung:

- Aufbau des Zahlensystems von den natürlichen zu den reellen Zahlen
- Komplexe Zahlen und Anwendungen
- Polynome
- Folgen, Reihen und Grenzwerte
- Reelle Funktionen und Stetigkeit
- Differentialrechnung
- Asymptotisches Wachstum, O-Notation
- Bestimmtes und unbestimmtes Integral
- Anwendungen der Integralrechnung
- Potenzreihen und Taylor-Reihen

Der Aufbau der Vorlesung orientiert sich an einigen gut etablierten Lehrbüchern. An erster Stelle ist dabei das Buch *Höhere Mathematik 1* (Springer) von K. Meyberg und P. Vachenauer zu nennen, nach dessen Vorbild wesentliche Teile der Kapitel 3 bis 6 ausgearbeitet wurden. Die neueren Lehrbücher *Mathematik für Informatiker* (Pearson Studium) von D. Hachenberger bzw. *Mathematik für Informatiker* (Vieweg) von P. Hartmann sind gleichfalls als Basisliteratur sehr gut geeignet. Eine vollständige Literaturliste findet man am Ende des Skripts.

Kapitel 1

Aufbau des Zahlensystems

1.1 Von den natürlichen zu den rationalen Zahlen

In diesem Abschnitt wird in kurzer Form der formale Aufbau der Bereiche der natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ wiederholt. Danach werden die strukturellen Eigenschaften dieser Bereiche genauer untersucht.

Natürliche Zahlen

Die Grundlage zum Aufbau des gesamten Zahlensystems liefern die Peano-Axiome der natürlichen Zahlen:

1. Axiom: 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Axiom: Jede natürliche Zahl n hat einen eindeutigen Nachfolger $S(n)$, der auch eine natürliche Zahl ist.
3. Axiom: Aus $S(n) = S(m)$ folgt $n = m$.
4. Axiom: 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
5. Axiom: Jede Menge X, die 0 enthält und für die gilt, dass aus $n \in X$ auch $S(n) \in X$ folgt, enthält alle natürlichen Zahlen.

Darauf aufbauend können Funktionen und Operationen rekursiv definiert sowie Eigenschaften dieser Operationen mit vollständiger Induktion bewiesen werden. So definiert man die Addition rekursiv durch $n + 0 = n$ und $n + S(k) = S(n + k)$ für alle natürlichen Zahlen n und k, danach die Multiplikation durch $n \cdot 0 = 0$ und $n \cdot S(k) = (n \cdot k) + n$. Wichtige Eigenschaften dieser Operationen, wie die Assoziativität, Kommutativität und Distributivität kann man unter Verwendung der rekursiven Definition mit vollständiger Induktion beweisen.
Die Beobachtung, dass diese Operationen im Bereich der natürlichen Zahlen nur eingeschränkt umkehrbar sind, führt zunächst zur Erweiterung auf die ganzen Zahlen und danach auf die rationalen Zahlen.

Formale Erweiterungen

Ganze Zahlen werden als Differenz von zwei natürlichen Zahlen eingeführt, d.h. ein Paar von natürlichen Zahlen (a, b) repräsentiert die Differenz $a - b$. Da diese Darstellung einer Differenz nicht eindeutig ist, werden alle Darstellungen der gleichen Differenz in einer Äquivalenzklasse zusammengefasst:

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/_\sim \qquad \text{wobei} \qquad (a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow a + d = b + c$$

Die Operationen für die ganzen Zahlen (also auf den Äquivalenzklassen) werden auf den Repräsentanten definiert, wobei die Repräsentantenunabhängigkeit der Definition nachgewiesen werden muss. Neben der Addition und Multiplikation ist nun auch die Subtraktion eine voll definierte Operation. In der folgenden Definition werden keine neuen Symbole für die neuen Operationen verwendet (auf der linke Seite der Gleichungen die neue Operation, rechts die alten Operationen in $\mathbb{N}$).

$$\begin{array}{lll} \text{Addition:} & [(a,b)]_\sim + [(c,d)]_\sim & = [(a+c, b+d)]_\sim \\ \text{Subtraktion:} & [(a,b)]_\sim - [(c,d)]_\sim & = [(a+d, b+c)]_\sim \\ \text{Multiplikation:} & [(a,b)]_\sim \cdot [(c,d)]_\sim & = [(a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)]_\sim \end{array}$$

Die Erweiterung zu den rationalen Zahlen erfolgt auf analoge Art und Weise. Rationale Zahlen werden durch ein Paar aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+$ repräsentiert, wobei die erste Komponente als Zähler und die zweite Komponente als Nenner eines Bruchs angesehen werden. Durch eine Äquivalenzrelation $\approx$ werden alle Brüche, die den gleichen Wert repräsentieren, zu einer Äquivalenzklasse zusammengefasst:

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+)/_\approx \qquad \text{wobei} \qquad (a,b) \approx (c,d) \Longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Die neuen Operationen werden wie folgt definiert:

$$\begin{array}{lll} \text{Addition:} & [(a,b)]_\approx + [(c,d)]_\approx & = [(a \cdot d + b \cdot c, b \cdot d)]_\approx \\ \text{Subtraktion:} & [(a,b)]_\approx - [(c,d)]_\approx & = [(a \cdot d - b \cdot c, b \cdot d)]_\approx \\ \text{Multiplikation:} & [(a,b)]_\approx \cdot [(c,d)]_\approx & = [(a \cdot c, b \cdot d)]_\approx \\ \text{Division für } c \neq 0: & [(a,b)]_\approx : [(c,d)]_\approx & = \begin{cases} [(a \cdot d, b \cdot c)]_\approx & \text{falls } c > 0 \\ [(-a \cdot d, -b \cdot c)]_\approx & \text{falls } c < 0 \end{cases} \end{array}$$

Die Fallunterscheidung im letzten Punkt dient dazu, einen positiven Wert im Nenner sicherzustellen.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ als geordnete Strukturen

Wir füheren die Kleiner-Gleich-Relation zuerst für die natürlichen Zahlen ein und werden sie danach auf die Bereiche der ganzen und der rationalen Zahlen erweitern. Wie schon bei den Operationen werden wir die Relationen auf den verschiedenen Bereichen jeweils mit dem gleichen Symbol, nämlich $\leq$ bezeichnen.

Für die natürlichen Zahlen kann man die Definition der Relation wieder auf die Peano-Axiome zurückführen, indem $\leq$ als reflexiv-transitiver Abschluß der Nachfolgerrelation beschrieben wird. Damit gilt $n \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auf Grund des reflexiven Abschlusses, $n \leq n+1$ als (direkte) Nachfolgerrelation, $n \leq n+2$ wegen $n \leq n+1$ sowie $n+1 \leq n+2$ als Nachfolger und der Transitivität. Allgemein kann man $n \leq n+m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion nach m beweisen.

Zur Erweiterung auf die ganzen Zahlen wird die Relation zunächst auf den Repräsentanaten definiert und in einem zweiten Schritt die Umabhängigkeit von der Wahl der Repräsentanten verifiziert. Für zwei Repräsentanten $(a,b), (b,c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert man

$$(a,b) \leq (c,d) \Longleftrightarrow a + d \leq b + c.$$

Man beachte, dass auf der linken Seite die neue Relation über $\mathbb{Z}$ und auf der rechten Seite die bereits bekannte Relation über $\mathbb{N}$ verwendet wird. Der Hintergrund ist wieder, dass das Paar (a,b) die Differenz $a - b$ repräsentieren soll und man $a - b \leq c - d$ mit den üblichen Rechenregeln durch Addition von b und d auf beiden Seiten äquivalent in $a + d \leq b + c$ umwandeln kann. Den Nachweis der Unabhängigkeit von der Repräsentantenwahl lassen wir wieder als Übungsaufgabe.

Die Erweiterung auf die rationalen Zahlen erfolgt analog. Sind $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+$ zwei Repäsentanten für die Brüche $\frac{a}{b}$ bzw. $\frac{c}{d}$, dann definieren wir

$$(a,b) \leq (c,d) \Longleftrightarrow ad \leq bc.$$

Strukturelle Betrachtungen

Mit dem strukturellen Ansatz werden die Gemeinsamkeiten bzw. Analogien zwischen den verschiedenen Zahlenbereichen, aber auch zu anderen mathematischen Objekten herausgearbeitet. Eine mathematische Struktur wird in der Regel durch eine Trägermenge, Operationen auf dieser Trägermenge und Eigenschaften dieser Operationen beschrieben.

Definition: Eine *Gruppe* $(G,*)$ besteht aus einer Trägermenge G und einer Operation $*: G \times G \longrightarrow G$ mit den folgenden drei Eigenschaften:

(G1) $\forall a,b,c \in G \quad (a*b)*c = a*(b*c)$ (Assoziativität)

(G2) $\exists e \in G \quad \forall a \in G \quad a*e = a = e*a$ (e ist neutrales Element)

(G3) $\forall a \in G \quad \exists \bar{a} \in G \quad a*\bar{a} = e = \bar{a}*a$ ($\bar{a}$ ist das zu a inverse Element)

$(G,*)$ ist *kommutative (abelsche) Gruppe*, falls zudem $\forall a,b \in G \quad a*b = b*a$ gilt.

Ist für ein Paar $(G,*)$ die Eigenschaft (G1) erfüllt, spricht man von einer *Halbgruppe* und sind die Eigenschaften (G1) und (G2) erfüllt, spricht man von einem *Monoid*.

Beispiele:

- $(\mathbb{Z},+)$ ist eine kommutative Gruppe.
- $(\mathbb{N},+)$ erfüllt mit $e=0$ nur die Kriterien (G1) und (G2) und ist deshalb ein Monoid.
- $(\mathbb{N}^+,+)$ erfüllt nur das Kriterium (G1) und ist damit eine Halbgruppe.
- $(\mathbb{Q},+)$ ist eine Gruppe.
- $(\mathbb{Q},\cdot)$ ist ein Monoid (kein zu 0 inverses Element).
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\},\cdot)$ ist eine Gruppe.
- $(S(M),\circ)$, wobei $S(M)$ die Menge der bijektiven Funktionen von M auf M und $\circ$ die Funktionskomposition darstellen, ist eine Gruppe. Dabei bildet die identische Funktion Id_M das neutrale Element und die inversen Elemente sind durch die Umkehrfunktionen f^{-1} gegeben.
- Bezeichne $\mathcal{B}_n$ die Menge aller n-stelligen Booleschen Funktionen und $\vee, \wedge, \oplus$ die Operationen Disjunktion, Konjunktion und Antivalenz.
  - $(\mathcal{B}_n,\vee)$ ist ein Monoid, wobei das neutrale Element die Überall-Null-Funktion ist.
  - $(\mathcal{B}_n,\wedge)$ ist ein Monoid, wobei das neutrale Element die Überall-Eins-Funktion ist.
  - $(\mathcal{B}_n,\oplus)$ ist eine Gruppe, wobei das neutrale Element wieder durch die Überall-Null-Funktion gestellt wird und jede Funktion zu sich selbst invers ist.

Definition: Ein *Ring* $(R,\oplus,\odot)$ besteht aus einer Menge R und zwei Operationen $\oplus,\odot : R \times R \longrightarrow R$ mit den folgenden Eigenschaften:

(R1) $(R, \oplus)$ kommutative Gruppe

(R2) $(R, \odot)$ Halbgruppe

(R3) $\forall a, b, c \in R \quad \begin{aligned} a \odot (b \oplus c) &= a \odot b \oplus a \odot c \\ (a \oplus b) \odot c &= a \odot c \oplus b \odot c \end{aligned}$ (Distributivgesetze)

Definition: Das $\oplus$-neutrale Element in einem Ring wird mit 0 bezeichnet, sofern ein $\odot$-neutrales Element existiert, nennt man es 1. Häufig betrachtete Spezialfälle von Ringen sind *kommutative Ringe mit Einselement* ($\odot$ ist kommutativ mit neutralem Element) und *Körper*, bei denen $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ auch eine kommutative Gruppe ist.

Beispiele:

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit Einselement.
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper.
- Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ bezeichne $\mathbb{Z}_n$ die Menge $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ der möglichen Reste beim Teilen durch n. Definiert man darauf die Operationen Addition modulo n und Multiplikation modulo n entsteht ein kommutativer Ring mit Einselement, im Spezialfall, dass n eine Primzahl ist, sogar ein Körper.

Schlussfolgerungen aus den Definitionen:

Ein wesentlicher Vorteil der strukturellen Betrachtungen zeigt sich darin, dass man Sätze über Strukturen beweisen kann, die dann in jedem konkreten Exemplar der Struktur gültig sind und somit angewendet werden können. Exemplarisch werden hier ein paar einfache Schlussfolgerungen aus den Definitionen vorgestellt.

1) Das neutrale Element in einer Gruppe ist eindeutig.
Beweis: Angenommen zwei Elemente e und e' einer Gruppe erfüllen (G2). Dann wäre $e * e' = e'$ wegen (G2) für e und $e * e' = e$ wegen (G2) für e'. Damit muss $e = e'$ sein, d.h. das neutrale Element ist eindeutig.

2) In einer Gruppe ist für jedes Element $a \in G$ das zu a inverse Element eindeutig.
Beweis: Angenommen $\bar{a}$ und $\tilde{a}$ erfüllen beide (G3). Wir betrachten das Gruppenelement $b = (\bar{a} * a) * \tilde{a}$:

$$\begin{aligned} (\bar{a} * a) * \tilde{a} &= b = \bar{a} * (a * \tilde{a}) && |(G1) \\ e * \tilde{a} &= b = \bar{a} * e && |(G3) \text{ für } \bar{a} \text{ und für } \tilde{a} \\ \tilde{a} &= b = \bar{a} && |((G2)) \end{aligned}$$

3) In einer Gruppe hat jede Gleichung der Form $(a * x) * b = c$ eine eindeutige Lösung für x.
Beweis: Die Gleichung wird äquivalent umgeformt, d.h. jeder Schritt der Umformung ist auch umkehrbar. Werden beide Seiten der Gleichung von rechts mit dem zu b inversen Element verknüpft, und auf der linken Seite (G3) und (G2) angewendet, enhält man

$$(a * x) * b = c \Longleftrightarrow a * x = c * \bar{b}$$

Werden analog beide Seiten der neuen Gleichung von links mit $\bar{a}$ verknüpft, so ergibt sich die eindeutige Lösung der Gleichung:

$$a * x = c * \bar{b} \Longleftrightarrow x = \bar{a} * (c * \bar{b})$$

4) In einem Körper hat jede Gleichung der Form $a \odot x \oplus b = c$ eine eindeutige Lösung, wenn $a \neq 0$ ist.

Beweis: Man verwendet das Symbol $-b$ für das bezüglich $\oplus$ zu b inverse Element und a^{-1} für das bezüglich $\odot$ zu a inverse Element und erreicht mit ähnlichen Umformungen wie beim dritten Punkt die folgende Äquivalenz:

$$a \odot x \oplus b = c \Longleftrightarrow x = a^{-1} * (c \oplus (-b))$$

Die nützliche Eigenschaft der eindeutigen Lösbarkeit beschränkt sich in Körpern im Allgemeinen auf lineare Gleichungen. Eine einfache quadratische Gleichung, wie $x \cdot x = 2$ ist im Körper der rationalen Zahlen nicht lösbar. Die folgenden Erweiterungen der rationalen Zahlen auf die reellen und komplexen Zahlen dienen unter anderem dem Ziel, die Menge der lösbaren Gleichungen wesentlich zu vergrößern.

1.2 Reelle Zahlen

Zur Einführung der reellen Zahlen gibt es eine Reihe verschiedener Ansätze. In der reinen Mathematik wird häufig der Ansatz über die sogenannten Cauchy-Folgen (die in dieser Vorlesung erst zu einem späteren Zeitpunkt eingeführt werden) verwendet. Dem Vorteil dieses Weges, theoretisch sehr sauber zu sein, steht der Nachteil entgegen, dass er nicht besonders intuitiv ist. Wir werden hier einen Weg beschreiten, der an einigen Stellen Kompromisse (bzw. aufwändige Betrachtungen) bei der theoretischen Begründung erfordert, dafür aber sehr intuitiv ist.

Darstellung der reellen Zahlen

Definition: Eine positive *reelle Zahl* ist ein unendlicher Dezimalbruch der Form $z_0, z_1 z_2 z_3 \ldots$, wobei $z_0 \in \mathbb{N}$ und $z_i \in \{0, \ldots, 9\}$ für $i \geq 1$.
Dezimalbrüche, die mit $\bar{9}$ enden, werden als nicht zulässige Darstellungen von Zahlen mit $\bar{0}$ (oder von endlichen Dezimalbrüchen) betrachtet, z.B. $(2,43\bar{9} = 2,44\bar{0} = 2,44)$.

Satz: Eine reelle Zahl $z_0, z_1 z_2 z_3 \ldots$ ($z_0 \in \mathbb{N}$, $z_i \in \{0 \ldots 9\}$ für $i \geq 1$) ist genau dann rational, wenn die Folge $z_1 z_2 \ldots$ periodisch wird.

Beweis: Ist eine rationale Zahl als Bruch $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N}^+$ gegeben, tritt bei Ausführung des schriftlichen Divisionverfahrens nach der Kommastelle einer der folgenden zwei Fälle auf:

- Fall 1: Irgendwann tritt Rest 0 auf. Damit bricht die Division ab und der Quotient hat die Form $z_0, z_1 \ldots z_k \bar{0}$.
- Fall 2: Der Rest 0 tritt nie auf. Dann muss sich ein Rest wiederholen (denn es gibt nur q verschiedene Reste) und damit wird der Dezimalbruch periodisch.

Andererseits lässt sich jeder periodische Dezimalbruch als Bruch der Form $\frac{p}{q}$ darstellen. Das folgt aus einer einfachen Beobachtung:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{9} &= 0,\overline{1} \\ \tfrac{1}{99} &= 0,\overline{01} \\ \tfrac{1}{999} &= 0,\overline{001} \\ &\vdots \\ \tfrac{1}{10^k-1} &= 0,\overline{\underbrace{00\ldots0}_{k-1}1} \end{aligned}$$

Um $0,\overline{z_1 \dots z_k}$ als üblichen Bruch darzustellen, kann man die ganze Zahl $z_1 \dots z_k$ als Zähler und $10^k - 1$ als Nenner wählen. Das folgende Beispiel zeigt, wie im allgemeinen Fall zu verfahren ist:

$$8,31\overline{23} = \frac{831}{100} + \frac{1}{100} \cdot 23 \cdot \frac{1}{99} = \frac{831}{100} + \frac{23}{9900} = \frac{20573}{2475}$$

$\square$

Operationen auf den reellen Zahlen

In einem ersten Schritt führt man die negativen reellen Zahlen (gekennzeichnet durch das Vorzeichen $-$) als additions-inverse Elemente zu den positiven reellen Zahlen ein. Die üblichen arithmetischen Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) führt man auf die entsprechenden Operationen für rationale Zahlen zurück. Statt unendliche Dezimalbrüche zu verwenden, beschränkt man sich auf endliche Anfangsstücke (rational) und kann (mit einigen Zusatzbetrachtungen) abschätzen, bis zur wievielten Stelle das berechnete Ergebnis exakt ist. Durch Berücksichtigung von ausreichend vielen Stellen bei den Operanden kann das Ergebnis mit beliebiger Genauigkeit bestimmt werden. Zu beachten ist aber, dass als Operationsergebnis eine unzulässige Darstellung mit 9-Periode auftreten kann (z.B. bei $3 \cdot 0,2\overline{3} = 0,6\overline{9}$). In einem solchen Fall muss das Ergebnis in eine zulässige Darstellung umgeformt werden (im obigen Beispiel $= 0,6\overline{9} = 0,7\overline{0} = 0,7$).
Die reellen Zahlen bilden mit den Operationen Addition und Multiplikation einen Körper.

Die reellen Zahlen als geordnete Struktur

Definition: Positive reelle Zahlen werden folgendermaßen geordnet:

Wenn $z = z_0, z_1 z_2 \dots$ und $u = u_0, u_1 z_2 \dots$ $(z, u \in \mathbb{R}^+)$ unterschiedlich sind, dann sei $i \in \mathbb{N}$ der erste Index, an dem ein Unterschied auftritt. Die Werte an dieser Stelle entscheiden, welche Zahl die kleinere ist.

$$z_0, z_1 z_2 \dots < u_0, u_1 u_2 \dots \quad \Leftrightarrow \quad \exists i \in \mathbb{N} \;\; z_i < u_i \quad \wedge \quad \forall j < i \;\; z_j = u_j$$

Zur Erweitung der Ordnungsrelation auf alle reellen Zahlen $z, u \in \mathbb{R}$, müssen zwei weitere Fälle betrachtet werden:

Hat eine Zahl ein negatives Vorzeichen, die andere aber nicht, dann ist die negative die kleinere.

Sind beide Zahlen negativ, dann ist diejenige Zahl kleiner, deren Betrag größer ist, d.h.

$$-z_0, z_1 z_2 \dots < -u_0, u_1 u_2 \dots \quad \Leftrightarrow \quad u_0, u_1 u_2 \dots < z_0, z_1 z_2 \dots$$

Satz: Für zwei beliebige reelle Zahlen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $r_1 < r_2$ gibt es eine rationale Zahl q mit $r_1 < q < r_2$.

Beweis: Seien $r_1 = z_0, z_1 z_2 z_3 \dots$ und $r_2 = u_0, u_1 u_2 u_3 \dots$ zwei positive reelle Zahlen mit $r_1 < r_2$. Nach Definition gibt es $i \in \mathbb{N}$, so dass $z_i < u_i$ und $\forall j < i \;\; z_j = u_j$. Außerdem enden r_1 und r_2 *nicht* auf $\overline{9}$. Sei k erste Stelle hinter i, für die $z_k \neq 9$, dann gibt es ein $q = z_0, z_1 z_2 \dots (z_k + 1)\overline{0}$, so dass $r_1 < q < r_2$. $\square$

Beispiel:

$$\begin{aligned} r_1 &= 2,1436|4|9997\dots \\ q &= 2,1436|4|9998\overline{0} \\ r_2 &= 2,1436|5|0000\dots \end{aligned}$$

Schnitte, Schranken, Maxima, Minima und Grenzen

Definitionen: Sei $(M, \leq)$ eine total geordnete Menge und C Teilmenge von M.

- x ist *obere Schranke* von C, falls $\forall y \in C \quad y \leq x$.
- x ist *untere Schranke* von C, falls $\forall y \in C \quad y \geq x$.
- x ist größtes Element *(Maximum)* von C, falls x obere Schranke von C ist und $x \in C$.
- x ist kleinstes Element *(Minimum)* von C, falls x untere Schranke von C ist und $x \in C$.
- x ist obere Grenze *(Supremum)* von C, falls x die kleinste obere Schranke von C ist.
- x ist untere Grenze *(Infimum)* von C, falls x die größte untere Schranke von C ist.
- Eine Partition von M in die Mengen A und B ist ein *Schnitt* von M, wenn $\forall x \in A \quad \forall y \in B \quad x \leq y$.
  (Achtung: $A \cup B = M \quad \wedge \quad A \cap B = \emptyset$, da Partition)
- Es gibt drei Typen von Schnitten:
  - Typ 1: A hat ein größtes Element und B hat ein kleinstes Element.
  - Typ 2: A hat kein größtes Element und B hat kein kleinstes Element.
  - Typ 3: A hat ein größtes Element und B hat kein kleinstes Element oder A hat kein größtes Element und B hat ein kleinstes Element. Schnitte von Typ 3 werden *Dedekindsche Schnitte* genannt.

Beispiele:

- $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, \dots\}$ ist Typ-1-Schnitt von $\mathbb{N}$.
- $A = \{q \in \mathbb{Q}^+ \mid q^2 \leq 2\}$, $B = \{q \in \mathbb{Q}^+ \mid q^2 \geq 2\}$ ist Typ-2-Schnitt von $\mathbb{Q}^+$.
- $A = \{r \in \mathbb{R}^+ \mid r^2 \leq 2\}$, $B = \{r \in \mathbb{R}^+ \mid r^2 > 2\}$ ist Typ-3-Schnitt von $\mathbb{R}^+$.
- $A = \{r \in \mathbb{R}^+ \mid r^2 < 2\}$, $B = \{r \in \mathbb{R}^+ \mid r^2 \geq 2\}$ ist Typ-3-Schnitt von $\mathbb{R}^+$.

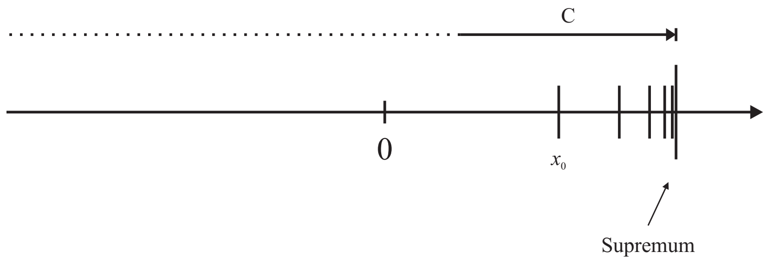
Hilfssatz: Besitzt C ein Maximum, so ist dieses Maximum gleich dem Supremum und entsprechendes gilt für das Minimum in Bezug auf das Infimum.

Beweis: Sei a das Maximum von C, dann ist $a \in C$ und a ist obere Schranke von C. Gäbe es eine kleinere obere Schranke a' von C, dann müsste a' auch obere Schranke für a sein (da $a \in C$). Daraus würde folgen, dass $a \leq a'$. Das ist ein Widerspruch, da a' kleiner als a sein sollte. $\square$

Satz: Jede von oben beschränke Teilmenge $C \neq \emptyset$ von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum und jede von unten beschränke Teilmenge $C \neq \emptyset$ von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum.

Beweis:

- Fall 1: C ist von oben beschränkt und $C \cap \mathbb{R}^{\geq 0} \neq \emptyset$.



Sei x_0 die größte Zahl aus $\mathbb{N}$, so dass eine Zahl $x_0, \ldots \in C$ existiert.
Sei x_1 die größte Zahl aus $\{0 \ldots 9\}$, so dass eine Zahl $x_0, x_1 \ldots \in C$ existiert. ...
Sei x_i die größte Zahl aus $\{0 \ldots 9\}$, so dass eine Zahl $x_0, x_1 x_2 \ldots x_i \ldots \in C$ existiert.

Man erhält einen unendlichen Dezimalbruch $x_0, x_1 x_2 \ldots$.

Problem: Für $C = \{0,9;\ 0,99;\ 0,999;\ \ldots\}$ würde dieser Prozess $0,\bar{9}$ liefern.
Lösung: Endet $x_0, x_1 x_2 \ldots$ mit $\bar{9}$ ab der Stelle i, so ersetzen wir diese Folge durch $x_0, x_1 x_2 \ldots (x_{i-1} + 1)\bar{0} \ldots$.

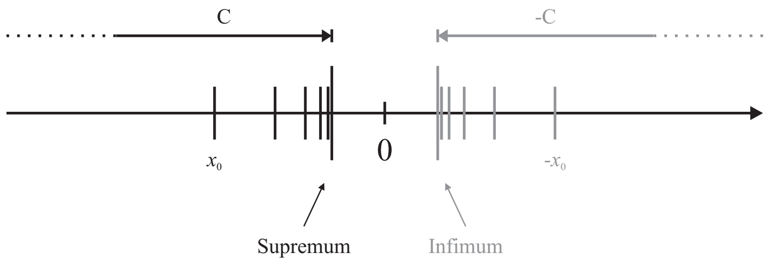
$\Rightarrow$ Die so konstruierte Zahl ist das Supremum von C.

- Fall 2: C ist von unten beschränkt, und alle Elemente aus C sind positiv oder 0 (d.h. $C \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0}$). Man verfährt analog: Sei x_0 die kleinste Zahl aus $\mathbb{N}$, so dass eine Zahl $x_0, \ldots \in C$ existiert.
  Sei x_1 die kleinste Zahl aus $\{0 \ldots 9\}$, so dass eine Zahl $x_0, x_1 \ldots \in C$ existiert. ...
  Sei x_i die kleinste Zahl aus $\{0 \ldots 9\}$, so dass eine Zahl $x_0, x_1 x_2 \ldots x_i \ldots \in C$ existiert.

  Man erhält einen unendlichen Dezimalbruch $x_0, x_1 x_2 \ldots$.

  $\Rightarrow$ Die so konstruierte Zahl ist das Infimum von C.

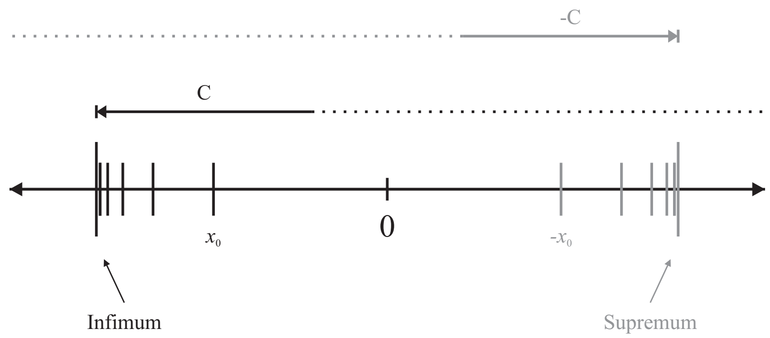
- Fall 3: C ist von oben beschränkt, und alle Elemente aus C sind negativ (formal ausgedrückt $C \cap \mathbb{R}^{\geq 0} = \emptyset$, d.h. $C \subseteq \mathbb{R}^-$).



  Man konstruiert $-C = \{x \mid -x \in C\}$ und führt es auf den Fall 2 zurück.

$$\sup C = -\inf(-C)$$

- Fall 4: C ist von unten beschränkt und $C \not\subseteq \mathbb{R}^{\geq 0} \Rightarrow C \cap \mathbb{R}^- \neq \emptyset$.



Man konstruiert $-C = \{x \mid -x \in C\}$ und führt es auf den Fall 1 zurück.

$$\inf C = -\sup(-C)$$

□

Satz: Für jeden Schnitt A, B von $\mathbb{R}^+$ gilt $\sup A = \inf B$.

Beweis: Durch die Schnitteigenschaft sind alle $x \in B$ obere Schranken von A und damit ist die kleinste obere Schranke (Supremum) von A eine untere Schranke von B. Folglich ist die größte untere Schranke (Infimum) von B größer oder gleich dem Supremum von A.
Das heißt: $\sup A \leq \inf B$. Angenommen $\sup A < \inf B$, dann gäbe es ein $q \in \mathbb{Q}$, so dass $\sup A < q < \inf B$. Dann wäre q weder in A noch in B, ein Widerspruch zu $A \cup B = \mathbb{R}^+$.
Folglich ist $\sup A = \inf B$. □

Folgerung: Jeder Schnitt von $\mathbb{R}^+$ ist ein Dedekindscher Schnitt.

Beweis: Sei A, B Schnitt in $\mathbb{R}^+$ mit $c = \sup A = \inf B$. Da der Schnitt eine Partition von $\mathbb{R}$ bildet, muss einer der folgenden zwei Fälle zutreffen:

- Fall 1: $c \in A$. Dann ist $c = \sup A$ eine obere Schranke von A und liegt in A. Damit hat A ein größtes Element und B hat *kein* kleinstes Element, denn $c \notin B$.
- Fall 2: $c \in B$. Dann ist $c = \inf B$ eine untere Schranke von B und liegt in B. Damit hat B ein kleinstes Element und A hat *kein* größtes Element, denn $c \notin A$. □

1.3 Ungleichungen, Beträge und Intervalle

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Regeln zur äquivalenten Umformung und zur Lösung von Ungleichungen besprochen. Die meisten Ungleichungen lassen sich mit Hilfe von wenigen elementaren Regeln ableiten.

Basisungleichungen: Für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a + c \leq b + c$
2. $a \leq b \quad \wedge \quad c \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c \leq b \cdot c$
3. $0 \leq a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad -b \leq -a \leq 0$
4. $a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} > 0$

Die folgenden Ungleichungen ergeben sich durch einfache oder mehrfache Anwendung der Basisungleichungen. In den Klammern findet man Verweise darauf, welche Regeln bei der Herleitung anzuwenden sind. Insbesondere sollte man beachten, dass bei den Regeln (6) und (10) wegen der Multiplikation mit einem negativen Wert eine Umkehrung der Relation erfolgt. Für beliebige $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

5. $a \leq b \quad \wedge \quad c \leq d \quad \Rightarrow \quad a + c \leq b + d \qquad\qquad (zweimal\ (1))$
6. $a \leq b \quad \wedge \quad c \leq 0 \quad \Rightarrow \quad b \cdot c \leq a \cdot c \qquad\qquad ((2)\ und\ (3))$
7. $0 \leq a \leq b \quad \wedge \quad 0 \leq c \leq d \quad \Rightarrow \quad 0 \leq a \cdot c \leq b \cdot d \qquad\qquad (zweimal\ (2))$
8. $0 \leq a \leq b \quad \wedge \quad c \leq d \leq 0 \quad \Rightarrow \quad b \cdot c \leq a \cdot d \leq 0 \qquad\qquad ((3), (7)\ und\ (3))$
9. $0 < a \leq b \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} \qquad\qquad (mit\ \frac{1}{ab}\ multiplizieren)$
10. $a \leq b < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0 \qquad\qquad (mit\ \frac{1}{ab}\ multiplizieren)$
11. $a^2 \geq 0 \qquad\qquad (Fallunterscheidung\ a \geq 0\ und\quad a < 0)$

Eine besondere Rolle spielen die sogenannten Betragsungleichungen. Der Nachweis von Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen erfolgt in der Regel über Fallunterscheidungen an Hand der folgenden Betragsdefinition:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{falls} \quad a < 0 \end{cases}$$

Daraus lassen sich die Gleichungen $|\text{-}a| = |a|$, $|ab| = |a||b|$, $||a|| = |a|$ und $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ ableiten. Die wichtigsten Ungleichungen sind:

12. $-|a| \leq a \leq |a|$
13. $|a| \leq b \quad \Leftrightarrow \quad -b \leq a \leq b$
14. $|a + b| \leq |a| + |b| \qquad\qquad$ (Dreiecksungleichung)
15. $\left| \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \right| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i| \qquad\qquad$ (verallgemeinerte Dreiecksungleichung)
16. $2 \cdot |a \cdot b| \leq a^2 + b^2$

Die letzte Ungleichung wird durch Anwendung der Regeln (11) und (13) bewiesen:

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq (a - b)^2 & \wedge & 0 \leq (a + b)^2 \\ 0 \leq a^2 + b^2 - 2ab & \wedge & 0 \leq a^2 + b^2 + 2ab \\ 2ab \leq a^2 + b^2 & \wedge & -(a^2 + b^2) \leq 2ab \\ -(a^2 + b^2) \leq & 2ab & \leq a^2 + b^2 \\ 2 \cdot |a \cdot b| & \leq & a^2 + b^2 \end{array}$$

Die Zusammenstellung wird durch zwei weitere, wichtige Ungleichungen vervollständigt.

Bernoulli-Ungleichung:

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh \qquad (\text{mit } h \geq -1, h \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^+)$$

Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang $n = 1$: $1 + h \leq 1 + h$

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{array}{rcll}
(1+h)^{n+1} & = & (1+h)^n \cdot (1+h) & \\
& \geq & (1+nh)\cdot(1+h) & \mid \text{nach Induktionsvoraussetzung und weil } 1+h \geq 0 \\
& = & 1+nh+h+nh^2 & \\
& = & 1+(n+1)h+nh^2 & \\
& \geq & 1+(n+1)h & \mid \text{da } n \geq 0 \text{ und } h^2 \geq 0 \qquad \square
\end{array}$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

Da der Beweis mit elementaren Mitteln (Induktion) sehr aufwändig ist, wird an dieser Stelle nur auf einen sehr eleganten Beweis verwiesen, der im nächsten Semester nachgereicht wird.

Intervalle

Intervalle werden durch eine untere und eine obere Grenze definiert. Man spricht von abgeschlossenen Intervallen, wenn die Grenzen zum Intervall gehören, anderenfalls von offenen Intervallen. Die Klammern [bzw.] bezeichnen ein von links bzw. rechts abgeschlossenes Intervall; die Klammern (bzw.) bezeichnen ein von links bzw. rechts offenes Intervall. Wenn ein Intervall nicht von unten bzw. von oben beschränkt ist, verwendet man an Stelle der unteren bzw. oberen Schranke das Symbol $-\infty$, bzw. ∞. Das heißt für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$:

$$\begin{array}{ccl}
[a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \\
[a,b) & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\
(-\infty,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \\
(a,\infty) & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\
(-\infty,\infty) & = & \mathbb{R} \\
(a-\varepsilon, a+\varepsilon) & & \varepsilon\text{-Umgebung von } a \text{ für } a \in \mathbb{R} \text{ und } \varepsilon > 0
\end{array}$$

Das Lösen einer Ungleichung bedeutet, alle Werte der Variablen zu bestimmen, für die die Ungleichung erfüllt ist. Die wichtigsten Werkzeuge dazu sind äquivalente Unformungen und häufig die Lösung von Funktionsgleichungen, insbesondere von quadratischen Gleichungen.

Beispiel: Lösung der Ungleichung $(|x|-2)^2 \geq 1$.
1) Man beginnt mit äquivalenten Umformungen:

$$(|x|-2)^2 \geq 1 \Longleftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 4 \geq 1 \Longleftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 3 \geq 0$$

2) Man substituiert $y = |x|$ und löst die quadratische Gleichung $y^2 - 4y + 3 = 0$:

$$y_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$$

3) Da die Parabel der quadratischen Funktion nach oben geöffnet ist, liegen die gesuchten Lösungen links von der kleineren und rechts von der größeren Nullstelle, d.h. nach Rücksubstitution

$$|x| \leq 1 \text{ oder } |x| \geq 3$$

4) Der letzte Schritt besteht in der Auflösung der Betragsungleichungen und Beschreibung der Gesamtlösung als Vereinigung von Intervallen:

$$L = (-\infty, -3] \cup [-1, 1] \cup [3, \infty)$$

1.4 Komplexe Zahlen

Einführung

Für jede reelle Zahl $a \neq 0$ werden die positiv-ganzzahligen Potenzen rekursiv definiert durch die Verankerung $a^0 = 1$ und die Rekursionsformel $a^{n+1} = a^n \cdot a$. Daraus kann man leicht die folgenden Exponentialgesetze ableiten:

$$a^{k+l} = a^k \cdot a^l \qquad \text{und} \qquad a^{k \cdot l} = (a^k)^l \qquad \text{für alle } k, l \in \mathbb{N}$$

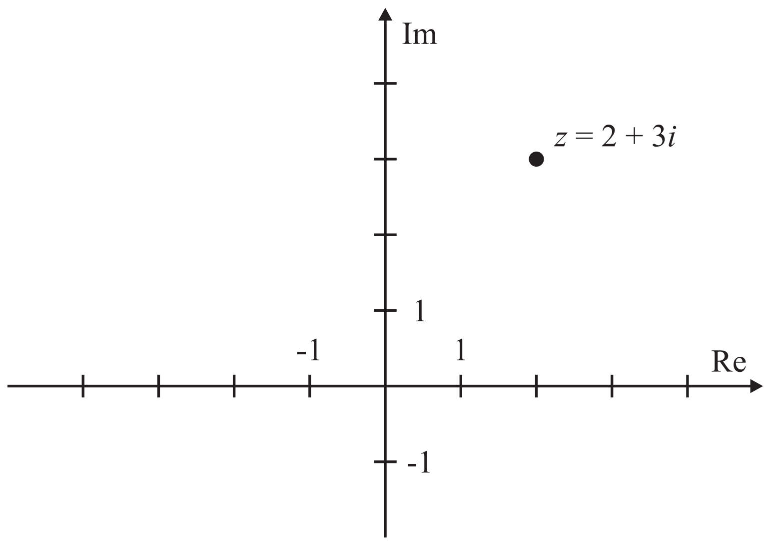
Soll die Definition auf negative ganzzahlige Potenzen unter Erhaltung des Exponentialgesetzes erweitert werden, bleibt als einzige Konsequenz aus $a^k \cdot a^{-k} = a^{k+(-k)} = a^0 = 1$ die Definition $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$.

Auf analoge Weise kann man für alle $a > 0$ auch gebrochene Potenzen einführen. Wegen $(a^{\frac{1}{k}})^k = a^{\frac{1}{k} \cdot k} = a^1 = a$, muss $a^{\frac{1}{k}}$ die Zahl sein, deren k-te Potenz a ist, also die Zahl, die man auch mit $\sqrt[k]{a}$ bezeichnet. In der Konsequenz ist $a^{\frac{k}{l}}$ die k-te Potenz der l-ten Wurzel aus a. Durch stetige Fortsetzung kann man die Definition sogar auf beliebige reelle Potenzen erweitern.

Die Einschränkung $a > 0$ war bei den obigen Betrachtungen essentiell, denn im Bereich der reellen Zahlen gibt es keine Quadratwurzeln aus negativen Zahlen (Ungleichung $r^2 \geq 0$). Mit der Einführung der komplexen Zahlen kann auf diese Einschränkung verzichtet werden. Überraschenderweise reicht es aus, die Quadratwurzel einer einzigen negativen Zahl, nämlich der -1, als imaginäre Einheit i einzuführen, um dann Quadratwurzeln und k-te Wurzeln aus beliebigen Zahlen ziehen zu können.

Kartesische Darstellung von komplexen Zahlen

Definition: Die Menge $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen* wird formal als kartesisches Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert. Jede *komplexe Zahl* z wird also durch ein Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ repräsentiert, wobei x Realteil und y Imaginärteil von z genannt wird. Da x und y auch als Koordinaten eines Punktes in der Ebene angesehen werden können, nennt man sie auch die *kartesischen Koordinaten* von z in der *komplexen Zahlenebene* (oder *Gauss-Ebene*). Zum besseren Verständnis der Operationen ist es üblich, komplexe Zahlen in der Form $z = x + iy$ zu schreiben. In diesem Sinne kann auch jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ als komplexe Zahl $x + i0$ dargestellt werden, insbesondere ist $0 = 0 + i0$.



Gleichheit und Rechenregeln

Für zwei beliebige komplexe Zahlen $z = x + iy$ und $w = u + iv$ sind die folgenden Relationen und Operationen definiert:

$$\begin{aligned}
z = w \quad &\Leftrightarrow \quad x = u \ \wedge \ y = v \\
z \pm w \quad &= \quad (x \pm u) + i(y \pm v) \\
z \cdot w \quad &= \quad (xu - yv) + i(xv + yu) \\
\frac{z}{w} \quad &= \quad \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i\frac{yu - xv}{u^2 + v^2} \qquad \text{nur für } w \neq 0
\end{aligned}$$

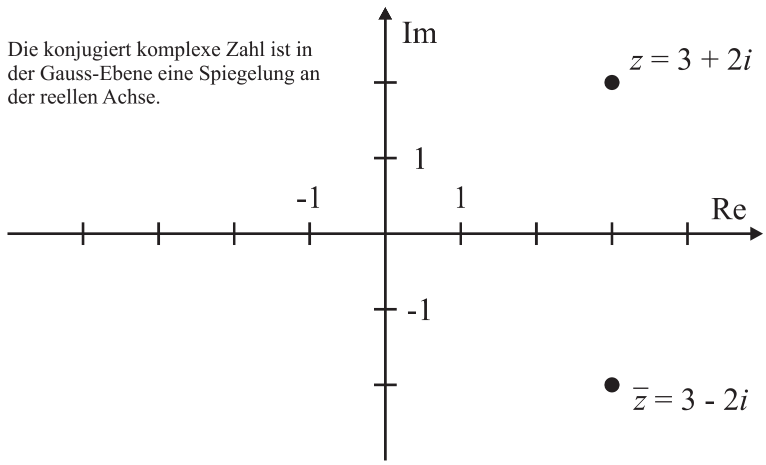
Man kann diese Regeln auch als einzig mögliche Erweiterung der bekannten Operationen auf reellen Zahlen unter Beachtung des Distributivgesetzes und der Festlegung $i^2 = -1$ ableiten.

$$\begin{aligned}
z \cdot w &= (x + iy)(u + iv) \\
&= xu + xiv + iyu + iyiv \\
&= (xu - yv) + i(xv + yu) \\
\frac{z}{w} &= \frac{x + iy}{u + iv} \\
&= \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} \\
&= \frac{(xu + yv) + i(yu - xv)}{u^2 - i^2v^2} \\
&= \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i\frac{yu - xv}{u^2 + v^2}
\end{aligned}$$

Konjugiert komplexe Zahlen und der Betrag

Definition: Für eine komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ wird die Zahl $\overline{z} = x - iy$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl* genannt.

Folgerung: $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$



Definition: Der Betrag $|z| \in \mathbb{R}$ einer komplexen Zahl $z = x + yi$ ist definiert durch

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Folgerung: $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

Rechenregeln: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{z+w} &= \overline{z} + \overline{w} \\
\overline{z \cdot w} &= \overline{z} \cdot \overline{w} \\
\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} &= \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \\
\overline{\overline{z}} &= z \\
\mathrm{Re}\ z &= \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \\
\mathrm{Im}\ z &= \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \\
|z \cdot w| &= |z| \cdot |w| \\
\left|\frac{z}{w}\right| &= \frac{|z|}{|w|} \\
|\overline{z}| &= |z|
\end{aligned}$$

Herleitung von $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ mit $z = x + iy$ und $w = u + iv$:

$$\begin{aligned}
z \cdot w &= (xu - yv) + i(xv + yu) \\
\overline{z \cdot w} &= (xu - yv) + i(-xv - yu) \\
\overline{z} \cdot \overline{w} &= (x - iy) \cdot (u - iv) \\
&= (xu - yv) + i(-xv - yu)
\end{aligned}$$

Herleitung von $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$:

$$\begin{aligned}
|z \cdot w| &= \sqrt{(zw)(\overline{zw})} \\
&= \sqrt{z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w}} \\
&= \sqrt{z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w}} \\
&= \sqrt{z \cdot \overline{z}} \cdot \sqrt{w \cdot \overline{w}} \\
&= |z| \cdot |w|
\end{aligned}$$

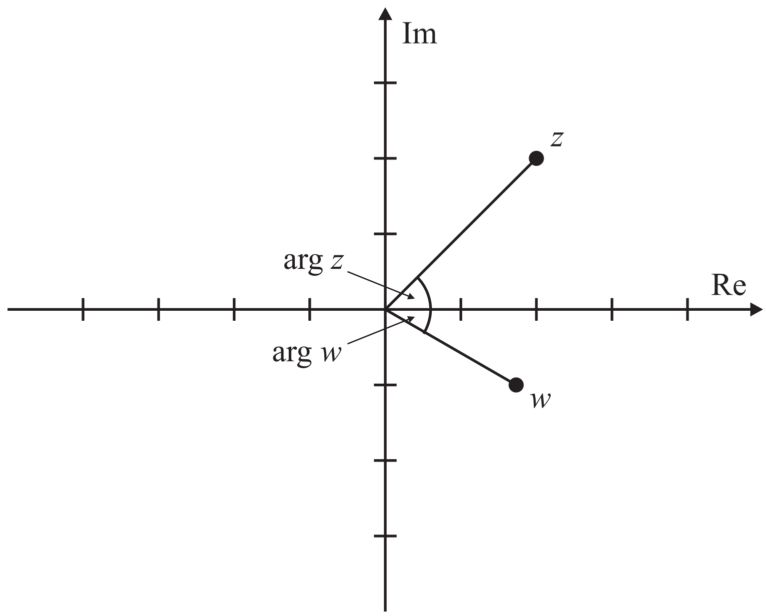
Polarform

Definition: Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist eindeutig bestimmt durch ihre *Polarkoordinaten* $|z|$ und $\arg z$, wobei das *Argument* (auch *Phase*) von z, der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Strahl von 0 nach z ist, der mit (entgegen) dem Uhrzeigersinn negativ (positiv) gemessen wird. Der Hauptwert für $\arg z$ wird aus $(-\pi, \pi]$ gewählt.

Achtung: Für die Zahl 0 ist arg nicht definiert!

Beispiel: Für die Zahlen $z = 2 + 2i$ und $w = \sqrt{3} - i$ kann man durch Anwendung des Satzes von Pythagoras und der Winkelfunktionen die folgenden Polarkoordinaten bestimmen:

$$|z| = \sqrt{8} \qquad \arg z = \frac{\pi}{4} \qquad\qquad \text{und} \qquad\qquad |w| = \sqrt{3+1} = 2 \qquad \arg w = -\frac{\pi}{6}$$



Allgemein gelten die folgenden Regeln für die Umrechnung der Darstellungssysteme.

Kartesische Darstellung $\mapsto$ Polardarstellung:

$$z = x + iy \quad \mapsto \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \arg = \begin{cases} \arccos \frac{x}{|z|} & \text{falls} \quad y \geq 0 \\ -\arccos \frac{x}{|z|} & \text{falls} \quad y < 0 \end{cases}$$

Polardarstellung $\mapsto$ Kartesische Darstellung:

$$r = |z| \quad \varphi = \arg z \quad \mapsto \quad z = r \cdot \cos\varphi + i \cdot r \cdot \sin\varphi$$

Eulers komplexe Exponentialfunktion

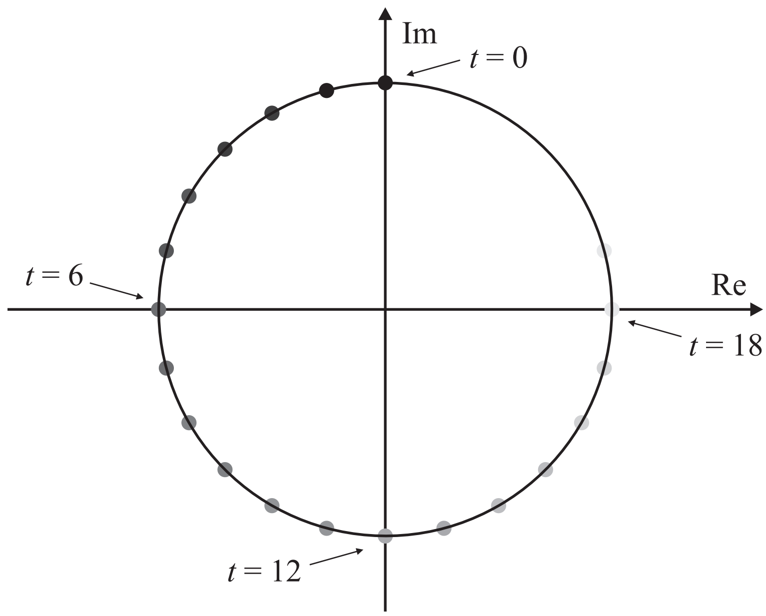
Definition: Die folgende Schreibweise für einen komplexen Exponentialausdruck geht auf L. Euler zurück:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

Bemerkungen:

1) Für jeden Winkel φ ist $\left|e^{i\varphi}\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \sqrt{1} = 1$ und damit liegt $e^{i\varphi}$ auf dem Einheitskreis.

2) Verändert sich der Winkel $\varphi(t) = \alpha + \omega t$ linear, so bewegt sich $z(t) = e^{i\varphi(t)}$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf dem Einheitskreis.
Die folgende Graphik zeigt ein Beispiel mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\omega = \frac{\pi}{12}$.



Definition: Durch eine Erweiterung auf beliebige komplexe Exponenten wird *Eulers komplexe Exponentialfunktion* eingeführt. Gleichzeitig ergibt sich dadurch eine dritte Variante zur Darstellung von komplexen Zahlen, die sogenannte *Exponentialform*:

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy},$$
$$\left|e^{x+iy}\right| = e^x \quad \text{und} \quad \arg\left(e^{x+iy}\right) = y \pm 2k\pi \in (-\pi, \pi]$$

Satz (de Moivre):

a) $e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$

b) $\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}$

c) $\overline{\left(e^{i\varphi}\right)} = e^{i(-\varphi)} = \frac{1}{e^{i\varphi}}$

Zum Beweis von a) verwendet man die Additionstheoreme der Winkelfunktionen:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} &= (\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot (\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= \cos\varphi \cdot \cos\psi - \sin\varphi \cdot \sin\psi + i\left(\sin\varphi \cdot \cos\psi + \cos\varphi \cdot \sin\psi\right) \\ &= \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi) \\ &= e^{i(\varphi+\psi)} \end{aligned}$$

Die anderen Aussagen lassen sich aus a) ableiten. Zum Beweis von b) verwendt man vollständige Induktion und für c) muss man einfach nachrechnen, dass $\overline{\left(e^{i\varphi}\right)}$ und $e^{i(-\varphi)}$ zu $e^{i\varphi}$ invers sind. □

Aus dem Satz von de Moivre ergeben sich einfache Multiplikations- und Divisionsformeln für (durch Polarkoordinaten gegebene) komplexe Zahlen $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$ und $w = |w| \cdot e^{i\psi}$:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z| \cdot e^{i\varphi} \cdot |w| \cdot e^{i\psi} = |z| \cdot |w| \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = |z| \cdot |w| \cdot e^{i\cdot(\varphi+\psi)} \\ \frac{z}{w} &= \frac{|z|}{|w|} \cdot \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\psi}} = \frac{|z|}{|w|} \cdot e^{i\cdot(\varphi-\psi)} \end{aligned}$$

Wurzeln von komplexen Zahlen

Definition: Der Ausdruck $\sqrt[n]{z}$ bezeichnet in $\mathbb{C}$ die Menge aller Nullstellen des Polynoms $x^n - z$, d.h. die Lösungsmenge der Gleichung $x^n = z$. Dagegen ist die reelle n-te Wurzel einer positiven reellen Zahl r der eindeutig bestimmte Wert $x \in \mathbb{R}^+$, für den $x^n = r$ gilt. Da man in beiden Fällen das gleiche Symbol verwendet, sollte bei reellen Radikanden

Zuerst werden die sogenannten n-ten komplexen Einheitswurzeln, das sind die n-ten Wurzeln der Zahl 1 betrachtet:

$$\sqrt[n]{1} = \{\zeta_{n,0}, \zeta_{n,1}, \zeta_{n,2}, \dots \zeta_{n,n-1}\} = \left\{1, e^{i\cdot 1\cdot\frac{2\pi}{n}}, e^{i\cdot 2\cdot\frac{2\pi}{n}}, \dots, e^{i\cdot(n-1)\cdot\frac{2\pi}{n}}\right\}$$

Die Korrektheit der obigen Lösungsmenge kann man durch Potenzieren nachweisen:

$$\left(e^{i\cdot\left(j\cdot\frac{2\pi}{n}\right)}\right)^n = e^{i\cdot n\cdot j\cdot\frac{2\pi}{n}} = e^{i\cdot(2\pi j)} = 1^j = 1$$

Um die Wurzeln einer beliebigen komplexen a Zahl zu bestimmen, geht man von der Exponentialdarstellung $a = |a|\cdot e^{i\varphi}$ der Zahl aus. Aus dem Satz von de Moivre folgt, dass die Zahl $x = \sqrt[n]{|a|}\cdot e^{i\cdot\frac{\varphi}{n}}$ eine Lösung der Gleichung $x^n = a$, und damit eine erste komplexe Wurzel aus a ist. Dabei steht der Term $\sqrt[n]{|a|}$ in der obigen Formel für die positive reelle n-te Wurzel aus $|a|$. Diese reelle Wurzel ist immer ein eindeutiger Wert, während die komplexe n-te Wurzel aus a (obwohl mit dem gleichen Symbol bezeichnet) immer eine n-elementige Menge ist:

$$\sqrt[n]{a} = \left\{ \sqrt[n]{|a|}\cdot e^{i\cdot\frac{\varphi}{n}}\cdot\zeta_j \;\middle|\; 0 \le j \le n\right\}$$

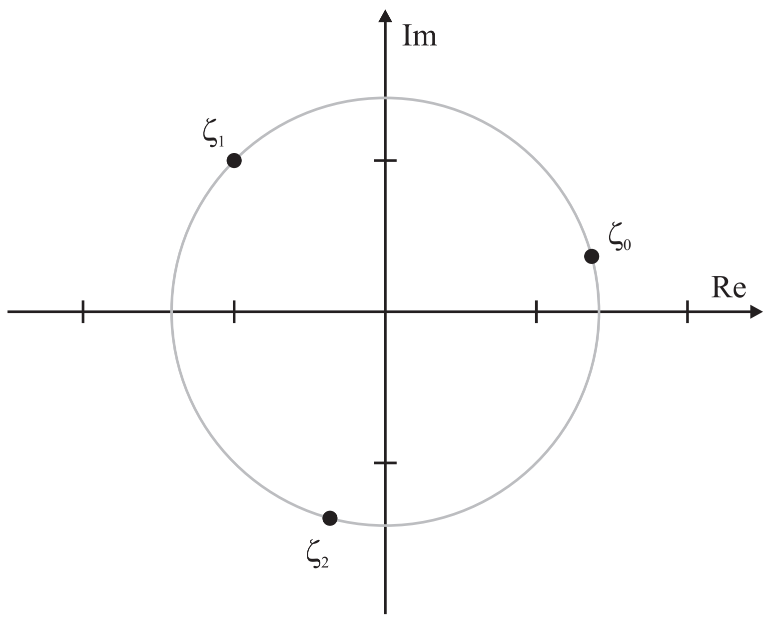
Überprüfung der Formel durch Potenzieren:

$$\left(\sqrt[n]{|a|}\cdot e^{i\cdot\frac{\varphi}{n}}\cdot\zeta_j\right)^n = \sqrt[n]{|a|}^n\cdot\left(e^{i\cdot\frac{\varphi}{n}}\right)^n\cdot\zeta_j^n = |a|\cdot e^{i\varphi}\cdot 1 = a$$

Beispiel: Zu bestimmen ist $a = \sqrt[3]{2+2i}$.

Aus $|a| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$ und $\arg a = arccos(\frac{2}{\sqrt{8}}) = arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$ ergibt sich als erste Lösung $\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3}} = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{12}}$ und insgesamt

$$\sqrt[3]{a} = \left\{\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{12}}, \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}, \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)}\right\} = \left\{\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{12}}, \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{17\pi}{12}}\right\}$$

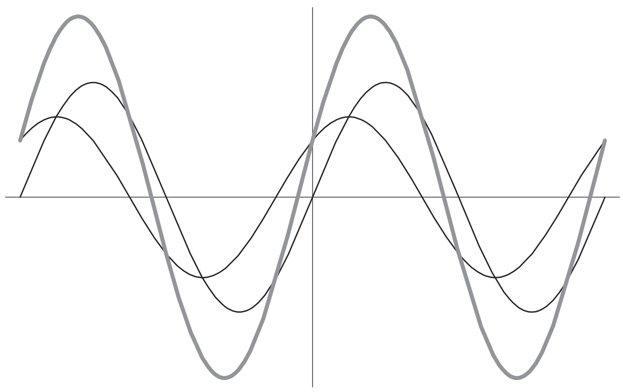


Anwendung I: Harmonische Schwingungen

Definition: Eine physikalische Größe der Form $s(t) = A \cdot \cos(\omega t + \alpha)$ mit $A, \omega, \alpha \in \mathbb{R}$ wird eine harmonische Schwingung genannt, wobei A die Amplitude, $\frac{2\pi}{\omega}$ die Periode und $\frac{\omega}{2\pi}$ die Frequenz der Schwingung sind

Um die Überlagerung (additiv) von zwei harmonischen Schwingungen gleicher Frequenz besser verstehen zu können, betrachtet man sie als Realteile von zwei komplexen Größen:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A_1 \cdot \cos(\omega t + \alpha_1) = \mathrm{Re}(A_1 \cdot e^{i(\omega t + \alpha_1)}) \\ s_2(t) &= A_2 \cdot \cos(\omega t + \alpha_2) = \mathrm{Re}(A_2 \cdot e^{i(\omega t + \alpha_2)}) \\ s(t) &= s_1(t) + s_2(t) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} s(t) = s_1(t) + s_2(t) &= \mathrm{Re}(A_1 \cdot e^{i(\omega t + \alpha_1)} + A_2 \cdot e^{i(\omega t + \alpha_2)}) \\ &= \mathrm{Re}(A_1 \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\alpha_1} + A_2 \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\alpha_2} \\ &= \mathrm{Re}((A_1 \cdot e^{i\alpha_1} + A_2 \cdot e^{i\alpha_2}) \cdot e^{i\omega t} \\ &= \mathrm{Re}((a_1 + a_2) \cdot e^{i\omega t}) \\ &= \mathrm{Re}(A \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t}) \\ &= \mathrm{Re}(A \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}) \\ &= A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Dabei sind $a_1 = A_1 \cdot e^{i\alpha_1}$, $a_2 = A_2 \cdot e^{i\alpha_2}$, $A = |a_1 + a_2|$ und $\varphi = \arg(a_1 + a_2)$. Diese Ableitung zeigt, dass die Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen gleicher Frequenz wieder eine harmonische Schwingung (der gleichen Frequenz) ist.

Anwendung II: Wechselstromnetze:

In einem Stromkreis mit einer Wechselspannung $u(t) = u_0 \cos(\omega t + \alpha)$ fließt ein Strom $j(t) = j_0 \cos(\omega t + \beta)$. Besteht der Stromkreis nur aus einem ohmschen Widerstand, gibt es keine Phasenverschiebung zwischen Spannungs- und Stromkurve, d.h. $\alpha = \beta$. Durch einen induktiven Widerstand (Spule) wird die Stromkurve nach rechts verschoben ($\alpha > \beta$), durch einen kapazitiven Widerstand (Kondensator) nach links ($\alpha < \beta$). Damit wird das ohmsche Gesetz - Widerstand ist gleich Spannung geteilt durch Stromstärke - scheinbar außer Kraft gesetzt. Mit Hilfe der komplexen Zahlen kann dieses physikalische Phänomen sehr elegant erklärt werden:

- $u(t)$ ist Realteil einer komplexen Größe $U(t) = u_0 \cdot e^{i(\omega t + \alpha)}$
- $j(t)$ ist Realteil einer komplexen Größe $J(t) = j_0 \cdot e^{i(\omega t + \beta)}$

- Damit ist der komplexe Widerstand $Z(t) = \frac{U(t)}{J(t)}$ eine Konstante:

$$Z(t) = \frac{U(t)}{J(t)} = \frac{u_0 \cdot e^{i\cdot(\omega t+\alpha)}}{j_0 \cdot e^{i\cdot(\omega t+\beta)}} = \frac{u_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\alpha}}{j_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\beta}} = \frac{u_0}{j_0} \cdot e^{i(\alpha-\beta)} \in \mathbb{C}$$

- Man bezeichnet Re Z als Wirkwiderstand, Im Z als Blindwiderstand und $|Z|$ als Scheinwiderstand.

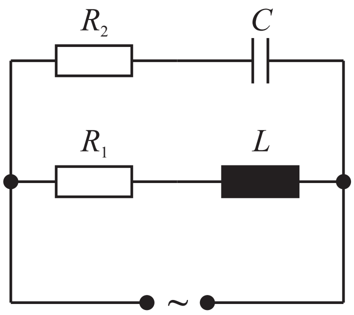
Schaltsymbole:

Ohmscher Widerstand: $Z = R$

Kapazität C
kapazitiver Widerstand: $Z = \frac{1}{i\omega C}$

Induktivität L
induktiver Widerstand: $Z = i\omega L$

Beispiel: Bei welcher Frequenz verhält sich der Gesamtwiderstand in der folgenden Schaltung wie ein ohmscher?



$$\begin{aligned} Z &= \frac{(R_1 + i\omega L)(R_2 + \frac{1}{i\omega C})}{R_1 + i\omega L + R_2 + \frac{1}{i\omega C}} \\ &= \frac{R_1^2 R_2 + R_1 R_2^2 + R_1 \frac{1}{\omega^2 C^2} + R_2 L^2 \omega + i(R_2^2 \omega L - \frac{R_1^2}{\omega C} + \frac{L}{\omega C^2} - \frac{\omega L^2}{C})}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \end{aligned}$$

Zu suchen ist der Wert für ω, so dass der Blindwiderstand Im $Z = 0$ wird.

$$\begin{aligned} \omega \left(R_2^2 L - \frac{L^2}{C} \right) &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{R_1^2}{C} - \frac{L}{C^2} \right) \\ \omega &= \sqrt{\frac{\frac{R_1^2}{C} - \frac{L}{C^2}}{R_2^2 L - \frac{L^2}{C}}} \end{aligned}$$