7. Aufgabenblatt vom Mittwoch, den 23.Mai 2012 zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker II

(Frank Hoffmann)

Abgabe: bis Freitag, den 01.Juni 2012, 10.15 Uhr

1. **Häufungspunkte** (4+2 Punkte)
   (a) Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine reellwertige Folge mit Grenzwert a und sei (b_n) eine beschränkte reellwertige Folge. Zeigen Sie dass alle Häufungspunkte der Produktfolge $(a_n b_n)_{n\geq 0}$ die Form $a \cdot x$ haben, wobei x ein Häufungspunkt von $(b_n)_{n\geq 0}$ ist.
   (b) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folgen
   $$\left(\sqrt[n]{n}\cdot[5\cdot(-1)^n + 2\cdot(-1)^{n+1}]\right)_{n>0} \quad \text{und} \quad \left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \cos(n\pi/2)\right)_{n\geq 0}$$

2. **Konvergent oder divergent?** (4 Punkte)
   (a) Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz. Begründen Sie Ihre Antworten kurz.
   $$\left(\frac{1}{n+1}\left(\frac{n^3+4n-1}{n^2}+5n\right)\right)_{n\geq 1} \qquad \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\log_2 k}{2k}\right)_{n\geq 1} \qquad \left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\ln k}\right)_{n\geq 1}$$
   (b) Betrachten Sie die Folge reeller Zahlen definiert durch $a_0 = 1$ und für $n+1 > 0$ sei $a_{n+1} = \frac{5(1+a_n)}{6+a_n}$. Untersuchen Sie diese Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

3. **Gebrochen rationale Funktionen** (4 Punkte)
   Seien $p(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ und $q(x) = \sum_{i=0}^{l} b_i x^i$ Polynome aus $\mathbb{R}[x]$ ungleich dem Nullpolynom. Untersuchen Sie das asymptotische Verhalten der Folgen
   $$\left(\frac{p(n)}{q(n)}\right)_{n\geq 0} \quad \text{und} \quad \left(\frac{p(-n)}{q(-n)}\right)_{n\geq 0}$$
   in Abhängigkeit vom Grad der Polynome und bestimmen sie ggf. die Grenzwerte.

4. **Nochmehr Grenzwerte** (4 Punkte)
   Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen
   $$\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right)_{n\geq 1} \quad \text{und} \quad \left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{n}{4}}\right)_{n\geq 1}$$

5. **Verständnis** (2 Punkte)
   Sind die beiden folgenden Aussagen über reellwertige Folgen richtig? Begründung!
   (a) Das Produkt aus einer beschränkten Folge und einer Nullfolge ist eine Nullfolge.
   (b) Das Produkt aus einer beschränkten Folge und einer konvergenten Folge ist eine konvergente Folge.