5. Aufgabenblatt vom Mittwoch, den 09.Mai 2012 zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker II

(Frank Hoffmann)

Abgabe: bis Freitag, den 18. Mai 2012, 10.15 Uhr

1. **Komplexes I** (4 Punkte)
   Bestimmen Sie jeweils den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen z_1 und z_2:
   $$z_1 = (1 + 2i - 3i^2 - 4i^3)^{-1} \quad ; \quad (1 + 2i) \cdot z_2 + (3 - 4i) = -1 - 3i$$

2. **Gleichungen** (4 Punkte)
   Lösen Sie die folgenden Gleichungen in den komplexen Zahlen.
   $$(3 + 2i)z^2 + 13z + 12 - 18i = 0 \quad ; \quad z^4 + (3 - 3i)z^2 + 4 - 3i = 0$$
   Hinweis(16.05.): Lösen Sie alternativ zur zweiten Gleichung $z^4 + (1 + i)z^2 + i = 0$

3. **Trigonometrische Darstellung hilft** (4 Punkte)
   Berechnen Sie mit Umweg über die trigonometrische Darstellung die folgenden Werte in algebraischer Darstellung:
   $$\frac{(1 + \sqrt{3}i)^{13} \cdot i^{17}}{(1 - \sqrt{3}i)^{11}} \quad ; \quad (3 + \sqrt{3}i)^6(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)^9$$

4. **Trigonometrisches** (4 Punkte)
   Trigonometrische Formeln kann man sehr einsichtig aus Formeln für $e^{i\phi}$ über einen entsprechenden Vergleich der Realteile bzw. Imaginärteile herleiten. Bestätigen Sie:
   $$\sin 4\phi = 8 \cos^3 \phi \sin \phi - 4 \cos \phi \sin \phi$$
   $$\cos 4\phi = 8 \cos^4 \phi - 8 \cos^2 \phi + 1$$

5. **Jenseits vom Komplexen...** (4 Punkte)
   Wir betrachten als Grundmenge $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ und definieren dafür die folgende Multiplikation:
   $$(a, b) * (c, d) = (ac - b\overline{d}, ad + b\overline{c})$$
   Untersuchen Sie diese Operation auf Assoziativität, Existenz eines neutralen Elements, Existenz von multiplikativen Inversen und auf Kommutativität.
   Tipp: Testen Sie $\frac{(\overline{a}, -b)}{|a|^2+|b|^2}$ als Inverses zu (a, b).